Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Operadores de Hankel

Daiane Silva de Freitas

Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis

março de 2006

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Operadores de Hankel

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração Básica em Análise.

Daiane Silva de Freitas

Florianópolis

março de 2006

Ao meu esposo, Alexsandro

Aos meus Pais, Nedilande e Tânia

Às minhas Irmãs, Nadja e Dáfne

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao Alexsandro, meu esposo, companheiro e grande amigo, por ser meu maior incentivador, por sempre acreditar em mim, pelo ombro amigo com o qual sempre pude contar e principalmente por fazer parte da minha vida e tornar meus dias mais felizes. Deixo aqui o meu muito obrigado, à você o grande amor da minha vida.

Agradeço aos meus pais, Tânia e Nedilande, por terem propiciado as condições e os incentivos necessários para que este resultado fosse atingido, também por sempre acreditarem que o estudo é o maior legado que os pais podem deixar para seus filhos e finalmente, agradeço pelo amor e carinho dedicados a mim.

Agradeço às minhas irmãs, pelo apoio e compreensão.

Agradeço em especial ao professor Ruy Exel ,à quem tenho grande apreço e consideração, pela orientação, pelo apoio e pela amizade a mim dedicada. Foi uma grande honra tê-lo como orientador.

Agradeço também aos colegas de Graduação que fizeram e fazem parte da minha vida e também aos novos colegas que aqui fiz, pelo apoio e amizade ao longo destes anos.

Agradeço, por fim, à CAPES, pelo suporte financeiro concedido durante os dois anos de mestrado.

A todos, o meu muito obrigado.

Resumo

Nesta dissertação, estudaremos o *Teorema de Nehari*, nosso principal resultado, que nos permite decidir quando uma matriz Hankel infinita representa um operador contínuo. Para isto, veremos brevemente alguns resultados sobre operadores de multiplicação, o que nos permitirá definir os operadores de Laurent e de Toeplitz, com os quais estabeleceremos importantes resultados que nos permitirão, juntamente com o Teorema de Parrott, demonstrar o nosso principal resultado. Sendo assim, estabeleceremos algumas condições para determinar quando certas matrizes (Laurent, Toeplitz e Hankel) representam operadores contínuos. Trataremos, também do *Teorema de Hartmann* que caracteriza quando um matriz Hankel compacta representa um operador contínuo.

Abstract

The main result studied in this work is Nehari's Theorem, which allows us to decide when does an infinite Hankel matrix represent a continuous operator. For this we will briefly discuss results about multiplication operators, enabling us to define Laurent and Toeplitz operators, with which we will establish important results, allowing us, together with Parrot's Theorem, to prove our main result. In that way we will give conditions to determine when do certain matrices (Laurent, Toeplitz and Hankel) represent continuous operators. Moreover we will discuss Hartmann's Theorem characterizing when does a Hankel matrix represent a compact operator.

Sumário

Introdução

Uma matriz infinita $H = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ é dita ser uma matriz Hankel infinita se $a_{i,j}$ é dada por alguma função de $i + j$. Em outras palavras, as entradas dessa matriz são constantes ao longo das diagonais perpendiculares à diagonal principal.

Zeev Nehari provou em [19] uma condição necessária e suficiente para uma matriz Hankel ser limitada. A condição é que a primeira linha da matriz H nos fornece os coeficientes de Fourier, de índices positivos, de alguma função mensurável e limitada no círculo unitário complexo.

Um ano após a publicação de Nehari, Philip Hartmann encontrou em [14] uma caracterização, semelhante à obtida por Nehari, para matrizes Hankel compactas. Este resultado nos diz que uma matriz Hankel é compacta se e somente se sua primeira linha fornece os coeficientes de Fourier, novamente de índices positivos, de uma função contínua no círculo unitário.

Assim, temos que a cada matriz Hankel limitada está associada uma função mensurável e limitada no círculo unitário complexo, enquanto a cada matriz Hankel compacta está associada uma função contínua no círculo unitário complexo.

Nossa proposta, nesta dissertação, é provar o resultado obtido por Nehari, ´que usou uma abordagem algébrica, a saber a relação entre as formas bilineares e os operadores lineares. Para tal usaremos como ferramenta principal o resultado obtido por Stephen Parrott em [17], do qual a partir de uma matriz Hankel encontramos uma matriz de Toeplitz, que é uma matriz unilateral infinita cujas diagonais paralelas à diagonal principal são constantes, e assim usando o teorema (2.2) no capítulo 2, obtemos uma função mensurável e limitada cujos coeficientes de Fourier, com índices positivos, são as entradas da matriz H.

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos, sendo que o primeiro trata apenas de alguns resultados preliminares, além do apêndice, que traz alguns resultados clássicos de grande importância no contexto deste trabalho. Como nosso objetivo é provar o resultado obtido por Nehari, sem usar as formas bilineares, fazemos no capítulo 2 uma breve discussão sobre operadores de Laurent (ou seja, operadores de multiplicação cujo domínio é o espaço $L^2(\mathbb{S}^1)$) e operadores de Toeplitz (um operador $T_\varphi(f)$ é dito de Toeplitz quando, $T_\varphi(f) = P(\varphi f), \quad \forall f \in H^2(\mathbb{S}^1)$), donde obtemos uma caracterização para estes operadores. Já no capítulo 3, tratamos especificamente do resultado obtido por Parrott em [17], o que nos permitir adicionar entradas de uma matriz sem alterar a norma da mesma. No capítulo 4, tratamos do nosso resultado principal, que é o resultado obtido por Nehari em [19] onde seguimos a prova dada por [17]. Para finalizar, no capítulo 5, tratamos do resultado obtido por Hartmann em [14], onde seguimos a prova dada por Lavon Page em [9].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 O Espaço $L^2(\mathbb{S}^1)$

Sejam $\mathbb{S}^1$ o círculo unitário no plano complexo, isto é, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e μ a medida normalizada de Lebesgue (i.e, μ é a extensão do comprimento de arco e $\mu(\mathbb{S}^1) = 1$) nos borelianos de $\mathbb{S}^1$ (lembre que um conjunto boreliano é um elemento da σ-álgebra Borel, que é a σ-álgebra $B(\tau)$ onde τ é a família de todos os abertos do conjunto dado, ou seja, é a menor σ-álgebra que contém os abertos do conjunto).

Vamos mostrar que o conjunto $B = \{e_n = z^n : z \in \mathbb{S}^1, n = 0, \pm1, \pm2, ...\}$ forma uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{S}^1)$ (o espaço das funções mensuráveis de quadrado integrável).

• B é um conjunto ortonormal.

De fato, considere o produto interno em $L^2(\mathbb{S}^1)$ donde temos que:

$$\begin{aligned}\langle e_n, e_m\rangle &= \int_{\mathbb{S}^1} z^n (z^m)^* d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}e^{-im\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta\end{aligned}$$

Vamos dividir a prova em dois casos:

Caso 1: $m = n$

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = 1$$

Caso 2: $m \neq n$

Desta forma temos que:

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[cos(n-m)\theta + isen(n-m)\theta]d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} cos(n-m)\theta d\theta + i\int_0^{2\pi} sen(n-m)\theta d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{sen(n-m)\theta}{n-m} - i\frac{cos(n-m)\theta}{n-m}\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm};$$

donde segue que B é ortonormal.

- B forma uma base para $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Para mostrar esta afirmação vamos usar o teorema de Stone-Weierstrass, notando apenas que esse teorema nos diz que o conjunto dos polinômios é denso em $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, e queremos mostrar que este conjunto é denso em $L^2(\mathbb{S}^1)$. Note ainda que temos a seguinte relação:

$$Span(B) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \subseteq L^2(\mathbb{S}^1)$$

e mais, $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ é denso em $L^2(\mathbb{S}^1)$ (resultado no Apêndice - Teorema A.2).

Considere as normas em $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ e $L^2(\mathbb{S}^1)$, $\|.\|_\infty$ e $\|.\|_2$, respectivamente.

Assim temos que, dada $\xi \in L^2(\mathbb{S}^1)$, existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ tal que $\|f-\xi\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ (pela densidade de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ em $L^2(\mathbb{S}^1)$) e para esta f existe $g \in Span(B)$ tal que $\|f-g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$(pela densidade do $Span(B)$ em $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$).

Mostremos agora que $Span(B)$ é denso em $L^2(\mathbb{S}^1)$ e para isto, primeiramente vamos observar que a norma $\|.\|_\infty$ é mais fina que a norma $\|.\|_2$ e em seguida vamos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$ a função g obtida acima satisfaz $\|\xi - g\|_2 < \varepsilon$.

Assim,

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|_\infty^2 d\theta = \|f\|_\infty^2,$$

donde $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

Portanto,

$$\|\xi - g\|_2 \leq \|\xi - f\|_2 + \|f-g\|_2 \leq \|\xi - f\|_2 + \|f-g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $Span(B)$ é denso em $L^2(\mathbb{S}^1)$, donde resulta que B é uma base para $L^2(\mathbb{S}^1)$.

1.2 Operadores de Multiplicação

Suponha que X é um espaço mensurável com medida μ.

Definição 1.1 *Seja $\varphi : X \to \mathbb{C}$ uma função mensurável e essencialmente limitada. Diremos que o operador de multiplicação induzido por φ em $L^2(X)$ é o operador M_φ definido por:*

$$M_\varphi(f)(x) = \varphi(x)f(x), \qquad \forall x \in X \qquad e \quad f \in L^2(X).$$

Note que, se X é o conjunto dos inteiros positivos e μ é a medida de contagem então os operadores de multiplicação se reduzem aos operadores diagonais.

Vejamos agora alguns resultados importantes acerca dos operadores de multiplicação.

Teorema 1.1 *Seja M_φ um operador de multiplicação induzido por uma função mensurável e limitada φ num espaço de medida $\sigma - finita$, então $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

Demonstração: Seja μ uma medida $\sigma - finita$. Note que:

$$\begin{aligned} \|M_\varphi f\|^2 &= \int_X |\varphi f|^2 d\mu \leq \int_X |\varphi|^2 |f|^2 d\mu \\ &\leq (supess|\varphi|)^2 \int_X |f|^2 d\mu = \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Donde segue que: $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Provemos agora que $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $|\varphi(x)| > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$, num conjunto M de medida positiva, ou seja $\mu(M) = \infty$ ou é finita.

• **<u>caso 1:</u>** M tem medida finita.

Seja f é a função característica de M, isto é,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \notin M \\ 1, & \text{se} \quad x \in M \end{cases}$$

então

$$\|f\|^2 = \int_M 1 d\mu = \mu(M)$$

e assim :

$$\begin{aligned} \|M_\varphi f\|^2 &= \int_M |\varphi f|^2 d\mu = \int_M |\varphi|^2 .1 d\mu \\ &= \int_M |\varphi|^2 d\mu \geq (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2 \int_M d\mu \\ &= (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2 \mu(M) = (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

Donde segue que:

$$\|M_\varphi f\| \geq (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\|f\| \Rightarrow \|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty - \varepsilon.$$

Como isto vale para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$.

• **<u>caso 2:</u>** M tem medida infinita.

Sabemos, por hipótese que a medida é σ-finita, então podemos descrever o espaço X como uma reunião enumerável e crescente de conjuntos de medida finita, ou seja, $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, com $X_1 \subseteq X_2 \subseteq ... \subseteq X_n \subseteq ...$ e $\mu(X_n) < \infty$. Sendo assim, podemos escrever M da seguinte forma $M = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M \bigcap X_n$,onde cada conjunto $M \bigcap X_n$ tem medida finita donde

$$\mu(M) = \lim_{n\to\infty} \mu(M \bigcap X_n) = \infty$$

e assim temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \mu(M \bigcap X_{n_0}) < \infty$.

Agora vamos considerar f como sendo a função característica do conjunto $M \bigcap X_{n_0}$. Seguindo o procedimento do caso 1 obteremos que $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\varphi$.

$\square$

Teorema 1.2 *Sejam μ uma medida σ-finita e $A : L^2(X) \to L^2(X)$ um operador limitado tal que $A(f) = \varphi f \quad \forall f \in L^2(X)$, para alguma função φ. Então φ é mensurável e essencialmente limitada.*

Demonstração:

• φ é mensurável.

Como a medida é σ - finita, existe um elemento $f \in L^2(X)$ que não se anula em nenhum lugar, pois sabendo que a medida é σ-finita temos $X = \bigcup X_n = \bigcup A_n$, onde estas reuniões são crescentes e a última união é disjunta uma vez que

$$\begin{aligned}
A_1 &= X_1 \\
A_2 &= X_2 \backslash X_1 \\
A_3 &= X_3 \backslash (X_1 \bigcup X_2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

donde podemos definir a função f acima por

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2^n \mu(A_n)})^{\frac{1}{2}}, & \text{se} \quad x \in A_n \\ 0, & \text{se} \quad x \notin A_n \end{cases}$$

Sendo assim, sabendo que f é mensurável temos que $\frac{1}{f}$ também é mensurável e como A é um operador de $L^2(X)$ em $L^2(X)$, temos que φf é mensurável pois, $A(f) = \varphi f \in L^2(X)$.

Notando ainda que o produto de funções mensuráveis é uma função mensurável temos que $\varphi = (\varphi f)\frac{1}{f}$ é mensurável.

• φ é essencialmente limitada.

Para mostrarmos esta afirmação basta mostrar que $|\varphi(x)| \leq \|A\|$ quase sempre. Para tal, suponha que isto n ao ocorra, então existe um conjunto M mensurável de medida positiva no qual $|\varphi(x)| \geq \|A\|$ (i.e, $0 < \mu(M) < K$, onde K é um número finito, ou $\mu(M) = \infty$) e provemos que M deve ter medida nula. Para isto vamos dividir a prova em dois casos:

• **<u>Caso 1:</u>** $0 < \mu(M) < K$.

Se f é a função característica de M, então $f \in L^2(X)$ uma vez que $\|f\|^2 = \mu(M) < \infty$. Desta forma $f = 0$ quase sempre ou

$$\begin{aligned} \|Af\|^2 &= \int_M |\varphi f|^2 d\mu = \int_M |\varphi|^2 d\mu \\ &> \|A\|^2 \mu(M) = \|A\|^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|A\|^2 \geq \frac{\|Af\|^2}{\|f\|^2} > \|A\|^2.$$

Portanto M deve ter medida nula, donde segue que $\|\varphi\| \leq \|A\|$.

• **<u>Caso 2:</u>** $\mu(M) = \infty$.

Neste caso, usando a hipótese da medida ser σ-finita, vamos proceder como no caso 2 do teorema anterior, trabalhando com o conjunto $M \bigcap X_0$ e tomando F como a função característica deste conjunto. Assim, $M \bigcap X_0$ tem medida finita e ainda satisfaz $\|\varphi\| \geq \|A\|$ donde o restante da prova segue de forma análoga ao caso anterior.

$\square$

Observação 1.1 *Uma função essencialmente ilimitada não pode induzir uma transformação limitada de $L^2(X)$ em $L^2(X)$, pois se uma função induzir tal transformação, obrigatoriamente tem que ser essencialmente limitada.*

Teorema 1.3 *Seja μ uma medida σ - finita e φ uma função de valores complexos tal que $\varphi f \in L^2(X)$ para toda $f \in L^2(X)$ então, φ é essencialmente limitada.*

Demonstração: Vamos provar que o operador $A = \varphi f$ com $f \in L^2(X)$ é fechado e usar o teorema do gráfico fechado.

Como A é de $L^2(X)$em $L^2(X)$, temos que o domínio de A é fechado.

• A é fechado.

Suponha que (f_n, g_n) pertence ao gráfico de A (i.é, $g_n = \varphi f_n$), suponha ainda que $(f_n, g_n) \longrightarrow (f, g)$, ou seja, $f_n \longrightarrow f$ e $g_n \longrightarrow g$.

Assuma, sem perda de generalidade que $f_n \longrightarrow f$ e $g_n \longrightarrow g$ quase sempre, uma vez que se isto não vale para a seqüência $\{f_n\}$ valerá para uma subseqüência desta

(isto segue do fato da convergência uniforme implicar a convergência pontual, ver [2], e como a convergência quase sempre é a convergência pontual enfraquecida, ver [3], o resultado acima segue). Como $f_n \longrightarrow f$ quase sempre segue que $\varphi f_n \longrightarrow \varphi f$ quase sempre.

Mas temos que $\varphi f_n \longrightarrow g$ (pois $(f_n, g_n) \longrightarrow (f, g)$ quase sempre). Segue pela unicidade do limite que $g = \varphi f$. E assim (f, g) pertence ao gráfico de A, donde segue que A é fechado.

Portanto, pelo teorema do gráfico fechado temos que A é limitado, donde segue que φ é essencialmente limitada (pois $\|\varphi\|_\infty = \|A\|$ pelo teorema 1.1).

□

Capítulo 2

Operadores de Toeplitz

Neste capítulo enunciaremos algumas definições e alguns resultados auxiliares que serão utilizados nos capítulos posteriores, omitiremos algumas demonstrações por tratarem-se de resultados conhecidos. Também, neste capítulo, fixaremos as notações a serem usadas no presente trabalho.

2.1 Matrizes e Operadores de Laurent

Seja $\mathbb{S}^1$ o círculo unitário e μ a medida normalizada de Lebesgue.

Definição 2.1 *Seja φ uma função mensurável, limitada no círculo unitário, dizemos que o operador de multiplicação induzido por φ em $L^2(\mathbb{S}^1)$ é um operador de Laurent. Denotaremos este operador por L_φ.*

A matriz que representa um operador de Laurent L_φ, com relação à familiar base ortonormal de $L^2(\mathbb{S}^1)$ tem uma forma bastante simples, que está elegantemente relacionada com a função φ. Para descrever esta relação defina uma *matriz de Laurent* como uma matriz (bilateral) infinita $(\lambda_{n,m})$ tal que:

$$\lambda_{n+1,m+1} = \lambda_{n,m} \qquad \forall n, m(= 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Em outras palavras: uma matriz de Laurent é uma matriz cujas diagonais(paralelas a diagonal principal) são constantes.

$$\begin{bmatrix} \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, note que a matriz de L_φ é uma matriz de Laurent, e a relação entre as entradas dessa matriz com o multiplicador φ é dada por:

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= \langle L_\varphi(e_m), e_n\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) z^m z^{-n} dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{i(m-n)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \widehat{\varphi}(n-m) \end{aligned}$$

onde

$$\widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

denota o coeficiente de Fourier da função φ.

Lema 2.1 *Seja $A : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ limitado. Então, A comuta com o shift bilateral se e somente se $A = L_\varphi$, onde $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$.*

Demonstração: Seja S o operador shift bilateral. Note que S pode ser visto como um operador de multiplicação pois:

$$\begin{aligned} S: \quad l_2(\mathbb{Z}) &\to l_2(\mathbb{Z}) \\ e_n &\mapsto e_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_z: \quad L^2(\mathbb{S}^1) &\to L^2(\mathbb{S}^1) \\ z^n &\mapsto z^{n+1} \end{aligned}$$

Como existe um isomorfismo entre $l_2(\mathbb{Z})$ e $L^2(\mathbb{S}^1)$ segue que L_z pode ser identificado com S. Assim é fácil ver que S comuta com qualquer operador de multiplicação. De fato, seja $A = L_\varphi$,

$$SA(f)(z) = z\varphi(z)f(z) = \varphi(z)zf(z) = AS(f)(z).$$

Donde $AS = SA$.

Suponha agora que $AS = SA$ e provemos que A é um operador de multiplicação. Primeiramente vamos mostrar que A comuta com qualquer operador de multiplicação induzido por $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$. De fato, temos por hipótese que A comuta com $S = L_z$ e assim:

$$AL_{z^2} = AL_zL_z = L_zAL_z = L_zL_zA = L_{z^2}A.$$

$$\Rightarrow AL_{z^n} = L_{z^n}A, \forall n \geq 0.$$

Portanto:

$$A(\sum_{n=0}^{N} \lambda_n L_{z^n}) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n AL_{z^n} = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n L_{z^n}A = (\sum_{n=0}^{N} \lambda_n L_{z^n})A.$$

Observe que:

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda_n L_{z^n}(\xi) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n z^n \xi = p(z)\xi = L_p(\xi)$$

onde $p(z) = \sum_{n=-M}^{N} \lambda_n z^n$ e assim concluímos que A comuta com L_p. Mostremos agora que A comuta com $L_z^{-1} = (L_z)^{-1}$, note que isto decorre do seguinte resultado: "*$AB = BA$ e B inversível $\Rightarrow AB^{-1} = B^{-1}A$*"(de fato, $AB = BA \Rightarrow ABB^{-1} = BAB^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = B^{-1}BAB^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$). Donde A comuta com L_p . E como o conjunto dos polinômios trigonométricos é denso em $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, temos que para toda $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ existe uma seqüência de polinômios trigonométricos $\{p_n\}$ tal que $p_n \longrightarrow f$ uniformemente.

Note que $L_{p_n} \longrightarrow L_f$ uniformemente , uma vez que:

$$\|L_{p_n} - L_f\| = \|L_{p_n - f}\| \overset{(\text{Teo1.1})}{=} \|p_n - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Portanto:

$$AL_f = \lim_{n\to\infty} AL_{p_n} = \lim_{n\to\infty} L_{p_n}A = L_fA.$$

Sabendo que A é um operador limitado, e sendo $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ então:

$$A(\xi) = A(L_\xi(1)),$$

onde L_ξ é o operador de multiplicação induzido por ξ. Donde:

$$A(\xi) = A(L_\xi(1)) = L_\xi(A(1)) = L_\xi\varphi = \xi\varphi = \varphi\xi$$

onde $\varphi := A(1) \in L^2(\mathbb{S}^1)$, donde segue que φ é mensurável. Assim temos que:

$$A\xi = \varphi\xi, \qquad \forall \xi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$$

, ou seja o perador A está definido por φ no espaço $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ o qual é denso em $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Seja $E := \{z \in \mathbb{S}^1 : |\varphi(z)| > M\}$ onde $M > \|A\|$ e suponha que $\mu(E) > 0$. Vamos mostrar que E deve ter medida nula. De fato, pela regularidade da medida μ temos que $\forall \varepsilon > 0$, existe um compacto K e um aberto U tais que $K \subseteq E \subseteq U$ e $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Como U^c e K são fechados e $U^c \bigcap K = \emptyset$, temos pelo Lema de Urysohn que existe $\xi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ $(0 \leq \xi(z) \leq 1\ )$ tal que:

$$\xi(z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad z \in U^c \\ 1, & \text{se} \quad z \in K \end{cases}$$

Note que:

$$\|\varphi\xi\|^2 = \int_{\mathbb{S}^1} |\varphi\xi|^2 d\mu \geq \int_K |\varphi\xi|^2 d\mu > \int_K M^2|\xi|^2 d\mu = M^2\mu(K),$$

e

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &= \int_{\mathbb{S}^1} |\xi|^2 d\mu = \int_U |\xi|^2 d\mu \\ &= \int_K |\xi|^2 d\mu + \int_{U\setminus K} |\xi|^2 d\mu \\ &\leq \int_K |\xi|^2 d\mu + \int_{U\setminus K} d\mu \\ &= \mu(K) + \mu(U \setminus K) < \mu(K) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Note ainda que: $E \setminus K \subseteq U \setminus K$ e assim:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(K) + \mu(E \setminus K) \\ &\leqslant \mu(K) + \mu(U \setminus K) \\ &< \mu(K) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon < \frac{1}{2}\mu(E)$ temos que

$$\mu(K) > \mu(E) - \varepsilon > \mu(E) - \frac{1}{2}\mu(E) = \frac{1}{2}\mu(E).$$

Donde segue que:

$$\begin{aligned}
M^2\mu(K) &< \|\varphi\xi\|^2 = \|A\xi\|^2 \\
&\leq \|A\|^2\|\xi\|^2 \\
&< \|A\|^2(\mu(K)+\varepsilon) \\
\Rightarrow \mu(K)(M^2 - A^2) &\leq \varepsilon\|A\|^2
\end{aligned}$$

Mas temos que:

$$\frac{1}{2}\mu(E)(M^2 - \|A\|^2) < \mu(K)(M^2 - \|A\|^2)$$

donde

$$\frac{1}{2}\mu(E)(M^2 - \|A\|^2) < \|A\|^2\varepsilon.$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, em ambos os lados temos que:

$$\frac{1}{2}\mu(E)(M^2 - \|A\|^2) \leq 0$$

$$\Rightarrow M^2 - \|A\|^2 \leq 0 \Rightarrow M^2 \leq \|A\|^2 \Rightarrow M \leq \|A\|,$$

uma contradição. Logo E deve ter medida nula e assim concluímos que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Assim temos que, como $\varphi\xi$ é um operador de multiplicação que coincide com o operador $A\xi$ no conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ que é denso em $L^2(\mathbb{S}^1)$, onde φ é mensurável e limitada, o operador Aé um operador de multiplicação, ou seja, $A = L_\varphi$.

□

Vimos que a matriz que representa um operador de Laurent é uma matriz de Laurent. Veremos a seguir a recíproca deste resultado.

Teorema 2.1 *Seja $A : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ um operador limitado tal que sua matriz é uma matriz de Laurent. Então existe uma função φ em $L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $A = L_\varphi$, e neste caso $\widehat{\varphi}(n) = \lambda_{n,0}, \quad n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Vamos mostrar que existe uma função φ , com as propriedades acima, sabendo que operador A é representado por uma matriz de Laurent. Para isto, basta mostrar que A é um operador de multiplicação, pois um operador de multiplicação é unicamente determinado por uma função em $L^\infty(\mathbb{S}^1)$.

$\bullet A$ é um operador de multiplicação.

Para mostrar esta afirmação vamos usar o lema anterior. E assim, basta provar que A comuta com o operador shift bilateral.

Seja S tal operador.Então:

$$\langle ASe_j, e_i\rangle = \langle Ae_{j+1}, e_i\rangle = \langle Ae_j, e_{i-1}\rangle = \langle Ae_j, S^* e_i\rangle = \langle SAe_j, e_i\rangle.$$

Donde concluímos que $AS = SA$. Portanto A é um operador de multiplicação (operador de Laurent) e sendo assim, é unicamente determinado por um multiplicador $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$. Para finalizar, vamos mostrar que $\lambda_{n,0} = \widehat{\varphi}(n)$. De fato:

$$\lambda_{n,0} = \langle Ae_0, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{i0\theta}e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \widehat{\varphi}(n).$$

$\square$

Conclusão: Uma matriz de Laurent representa um operador de Laurent se e somente se existe uma função φ em $L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $\lambda_{n,0} = \widehat{\varphi}(n) \qquad n \in \mathbb{Z}$.

2.2 Matrizes e Operadores de Toeplitz

Sabendo que operadores de Laurent são operadores de multiplicação em $L^2(\mathbb{S}^1)$, vamos considerar o subespaço $H^2 \subset L^2(\mathbb{S}^1)$, onde H^2 é o subespaço fechado gerado pelo conjunto $\{e_n = z^n : n = 0, 1, 2, ..\}$, o qual obviamente forma uma base para o mesmo. Algo interessante é o que ocorre quando um operador de Laurent é contraído para $H^2(\mathbb{S}^1)$ cuja descrição é dita *teoria dos operadores de Toeplitz.*

Definição 2.2 *Um Operador de Toeplitz é a contração de um operador de Laurent para $H^2(\mathbb{S}^1)$. Ou seja, se φ é uma função mensurável e limitada e P é a projeção do espaço $L^2(\mathbb{S}^1)$ sobre o espaço $H^2(\mathbb{S}^1)$, então o operador de Toeplitz, denotado por T_φ, é dado por:*

$$T_\varphi(f) = P(\varphi f), \quad \forall f \in H^2(\mathbb{S}^1).$$

Observação 2.1 *O mais simples e não trivial exemplo de um operador de Laurent é o operador shift bilateral e o mais simples e não trivial exemplo de um operador de Toeplitz é o shift unilateral.*

Assim como uma matriz de Laurent na base natural de $L^2(\mathbb{S}^1)$ tem uma forma especialmente simples, uma matriz de Toeplitz na base natural de $H^2(\mathbb{S}^1)$, é uma matriz infinita (unilateral) $(\lambda_{n,m})$ tal que :

$$\lambda_{n,m} = \lambda_{n+1,m+1}, \qquad \forall n, m = 0, 1, 2, ...$$

Desta forma, uma matriz de Toeplitz também é uma matriz cujas diagonais paralelas a diagonal principal são constantes.

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

E assim como a matriz de L_φ é uma matriz de Laurent, a matriz de T_φ é uma matriz de Toeplitz e a relação entre as entradas dessa matriz com o multiplicador φ é dada por:

$$\lambda_{n,m} = \widehat{\varphi}(n-m).$$

Teorema 2.2 *Seja $A : H^2(\mathbb{S}^1) \to H^2(\mathbb{S}^1)$ um operador limitado tal que sua matriz é uma matriz de Toeplitz. Então existe uma $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $A = T_\varphi$ e $\|\varphi\| = \|A\|$, e neste caso $\lambda_{n,0} = \widehat{\varphi}(n), \quad \forall n \geq 0$.*

Demonstração: Suponha que $A \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{S}^1))$ é um operador tal que:

$$\lambda_{n,m} = \lambda_{n+1,m+1},$$

onde $\lambda_{n,m}$ representam os coeficientes da matraiz A na base canônica e vamos mostrar que existe uma $\varphi \in L^\infty(S^1)$ tal que $\lambda_{n,0} = \widehat{\varphi}(n), \quad \forall n \geq 0$. Para isto, basta mostrar que A é um operador de Toeplitz, uma vez que um operador de Toeplitz é obtido de um operador de Laurent, que é unicamente determinado por um multiplicador $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $\lambda_{n,0} = \widehat{\varphi}(n)$.

Defina, para cada inteiro não-negativo n, o operador $A_n : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ por:

$$A_n = S^{*n} A P S^n,$$

onde S é o operador shift bilateral e S^* é seu operador adjunto.

Sejam $i, j, k, l \geq 0$ tais que $k - l = i - j$, donde $a_{kl} = a_{ij}$, onde $a_{i,j}$ denotam as entradas da matriz A. Como conseqüência disto temos que para $k, l \geq 0$ e $i, j \geq -n$,

$$\begin{aligned}
\langle A_n e_j, e_i\rangle &= \langle S^{*n}APS^n e_j, e_i\rangle\\
&= \langle APe_{j+n}, S^n e_i\rangle = \langle APe_{j+n}, e_{i+n}\rangle\\
&= \langle Ae_{j+n}, e_{i+n}\rangle = \langle Ae_l, e_k\rangle,
\end{aligned}$$

donde $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ a seqüência $\{\langle A_n e_j, e_i\rangle\}$ é eventualmente constante (ou seja, a partir do índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq max\{-i, -j\}$ a seqüência $\{\langle A_n e_j, e_i\rangle\}$ é constante) e assim independe de n.

Conseqüência disto temos que: Se p e q são polinômios trigonométricos (isto é, combinações lineares finitas dos $e_i's, i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) então seqüência $\{\langle A_n p, q\rangle\}$ é convergente, uma vez que a partir de um certo índice (onde o índice n é da forma acima) é constante. Como:

$$\|A_n\| \leq \|A_0\| = \|A\|,$$

temos que $\{A_n\}$ é limitada em $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$.

Nosso objetivo agora é definir uma forma sesquilinear a partir do limite

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n f, g\rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{S}^1),$$

e para isto primeiramente vamos mostrar que este limite de fato existe $\forall f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$, uma vez que pelo que foi visto acima este limite existe quando f', g' são polinômios. De fato, sabendo que o limite acima existe quando f', g' são polinômios, considere

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n f', g'\rangle = \langle A_\infty f', g'\rangle, \quad \forall f', g' \quad \text{polinômios.}$$

E assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ temos $|\langle A_n f', g'\rangle - \langle A_\infty f', g'\rangle| < \frac{\varepsilon}{5}$. Sabendo ainda que dadas $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ existem polinômios f', g' tais que $\|f - f'\| < \frac{\varepsilon}{5KM}$ e $\|g - g'\| < \frac{\varepsilon}{5KN}$, onde K, N, M são constantes positivas tais que $\|A_\infty\| = \|A_n\| \leq \|A\| = K$, $\|f'\| = N$ e $\|g\| = M$.

Assim, dados $\varepsilon > 0$, $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ e f', g' polinômios, da forma acima temos

$$\begin{aligned}
|\langle A_n f, g\rangle - \langle A_\infty f, g\rangle| &\leq |\langle A_n f, g\rangle - \langle A_n f', g'\rangle| + |\langle A_n f', g'\rangle - \langle A_\infty f', g'\rangle|\\
&+ |\langle A_\infty f', g'\rangle - \langle A_\infty f, g\rangle|\\
&< |\langle A_n f, g\rangle - \langle A_n f', g\rangle + \langle A_n f', g\rangle - \langle A_n f', g'\rangle|\\
&+ \frac{\varepsilon}{5} + |\langle A_\infty f', g'\rangle - \langle A_\infty f', g\rangle + \langle A_\infty f', g\rangle - \langle A_\infty f, g\rangle|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |\langle A_n(f-f'),g\rangle + \langle A_n f', g-g'\rangle| + \frac{\varepsilon}{5} \\
&+ |\langle A_\infty f', g'-g\rangle + \langle A_\infty (f-f'),g\rangle| \\
&\leq \|A_n\|\|f-f'\|\|g\| + \|A_n\|\|f'\|\|g-g'\| + \frac{\varepsilon}{5} \\
&+ \|A_\infty\|\|f'\|\|g-g'\| + \|A_\infty\|\|f-f'\|\|g\| \\
&< K\frac{\varepsilon}{5KM}M + KN\frac{\varepsilon}{5KN} + \frac{\varepsilon}{5} + KN\frac{\varepsilon}{5KN} + K\frac{\varepsilon}{5KM}M \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

e assim fica provada a existência do limite acima para toda $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$.

Agora podemos definir

$$\psi(f,g) = \lim_{n\to\infty} \langle A_n f, g\rangle, \quad \forall f,g \in L^2(\mathbb{S}^1)$$

que é uma forma sesquilinear contínua, donde temos que existe um único operador $A_\infty \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$ tal que

$$\psi(f,g) = \langle A_\infty f, g\rangle.$$

Assim temos que a seqüência $\{A_n\}$ converge fracamente no conjunto dos polinômios trigonométricos e como este é denso em $L^2(\mathbb{S}^1)$, temos por continuidade que $\{A_n\}$ converge fracamente para o operador $A_\infty \in \mathcal{B}L^2(\mathbb{S}^1))$.

Observe que A_∞ é de fato um operador de Laurent, sejam $i, j \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
\langle A_\infty e_j, e_i\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle S^{*n} APS^n e_j, e_i\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle S^{*n+1} APS^{n+1} e_j, e_i\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle S^{*n+1} APS^{n} e_{j+1}, e_i\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle S^{*n} APS^{n} e_{j+1}, Se_i\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle S^{*n} APS^{n} e_{j+1}, e_{i+1}\rangle \\
&= \langle A_\infty e_{j+1}, e_{i+1}\rangle.
\end{aligned}
$$

Dessa forma fica provado que A_∞ é um operador de Laurent. Assim: se $e_i, e_j \in H^2(\mathbb{S}^1)$, então:

$$\langle PA_\infty e_j, e_i\rangle = \langle A_\infty e_j, e_i\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S^{*n} APS^n e_j, e_i\rangle = \langle Ae_j, e_i\rangle.$$

Logo, $PA_\infty f = Af \qquad \forall f \in H^2(\mathbb{S}^1)$ uma vez que f pode ser escrita como uma combinação linear infinita dos $e_i^{,s}$ e portanto A é a compressão para $H^2(\mathbb{S}^1)$ de um operador de Laurent e, por definição, A é um operador de Toeplitz. Dessa forma, existe $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que

$$Af = P(\varphi f), \qquad \forall f \in H^2(\mathbb{S}^1)$$

e conseqüência $\lambda_{n,0} = \widehat{\varphi}(n), \quad n \geq 0$.

Para concluir nossa demonstração, basta mostrar que $\|\varphi\| = \|A\|$. De fato, observe que

$$\|A\| = \|T_\varphi\| = \|PL_\varphi|_{H^2(\mathbb{S}^1}\| \leq \|L_\varphi\| = \|\varphi\|,$$

por outro lado temos que

$$\|\varphi\| = \|L_\varphi\| = \|A_\infty\| \leq \|A\|,$$

donde resulta que $\|A\| = \|\varphi\|$

□

Observação 2.2 *Como podemos obter a função φ que induz A, a partir de A? Se $A = T_\varphi$ então $A_\infty = L_\varphi$ e ainda, os coeficientes de Fourier de φ são as entradas da matriz A_∞, isto é $\widehat{\varphi}(n) = \lambda_{n,0}, \quad n \in \mathbb{Z}$. Esta é uma maneira de obtermos φ a partir de A_∞, mas gostaríamos de obter uma resposta em termos de A. Sejam $\imath, \jmath \geqq 0$,então*

$$\langle Ae_j, e_i \rangle = \langle A_\infty e_j, e_i \rangle = \widehat{\varphi}(i-j)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{\varphi}(i) = \langle Ae_0, e_i \rangle, & \forall i \geq 0 \\ \widehat{\varphi}(-j) = \langle Ae_j, e_0 \rangle, & \forall j \geq 0 \end{cases}$$

Desta forma φ é uma função cujos coeficientes de Fourier de índices positivos são os termos da coluna zero da matriz que representa A e os coeficientes de índices negativos são os termos da linha zero da mesma matriz.

Corolário 2.1 *Uma condição necessária e suficiente para que um operador $A \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{S}^1))$ seja um operador de Toeplitz é que $U^*AU = A$, onde U é o shift unilateral.*

Demonstração:

Basta observar que:

$$\langle Ae_{j+1}, e_{i+1}\rangle = \langle AUe_j, Ue_i\rangle = \langle U^*AUe_j, e_i\rangle, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \langle Ae_{j+1}, e_{i+1}\rangle &= \langle Ae_j, e_i\rangle \\ \Longleftrightarrow A &= U^*AU \end{aligned}$$

□

Observação 2.3 *Como S é unitário, não existe diferença entre $S^*AS = A$ e $AS = SA$. Já as equações correspondentes para U dizem coisas completamente diferentes. A primeira equação $A = U^*AU$ caracteriza um operador de Toeplitz enquanto é possível provar que a segunda, $UA = AU$ caracteriza um operador de Toeplitz analítico, ou seja, o operador é induzido por uma função analítica.*

Note ainda que um operador de Toeplitz analítico é subnormal e assim não é somente uma compressão para $H^2(\mathbb{S}^1)$ mas sim uma restrição do operador de Laurent.

Corolário 2.2 *O único operador de Toeplitz compacto é o operador nulo.*

Demonstração:

Note que se φ é uma função mensurável e limitada e se n e $n+k$ são inteiros não negativos, então:

$$\widehat{\varphi}(k) = \langle T_\varphi e_n, e_{n+k}\rangle.$$

Supondo que T_φ é compacto e sabendo que $e_n \longrightarrow 0$ fracamente (pois $\|\xi\|^2 = \sum |\langle \xi, e_n\rangle|^2 \Rightarrow \langle \xi, e_n\rangle \to 0$ e portanto $e_n \to 0$ fracamente), temos que:

$$\|T_\varphi e_n\| \longrightarrow 0.$$

Donde $\widehat{\varphi}(k) = 0, \quad \forall k$, pois

$$\|\widehat{\varphi}(k)\| = |\langle T_\varphi e_n, e_{n+k}\rangle|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|T_\varphi e_n\|\|e_{n+k}\| \\
&= \|T_\varphi e_n\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

e assim $\varphi = 0$. Portanto, $T_\varphi = 0$.

$\square$

Capítulo 3

Teorema de Parrott

Seja $\mathcal{B}(H,K)$ o espaço de Banach de todos operadores lineares e limitados de um espaço de Hilbert H num espaço de Hilbert K. Sejam H_1 e K_1 subespaços de H e K respectivamente e considere ainda $\mathcal{B}(H_1,K_1) \subseteq \mathcal{B}(H,K)$ (isometricamente incluído pelo operador identidade em $\mathcal{B}(H_1,K_1)$ com sua única extensão para H a qual é zero em $H_1^{\perp}$). Vamos observar que existe um modo simples de determinar a norma da imagem $p(T)$ de um elemento $T \in \mathcal{B}(H,K)$ pela aplicação quociente:

$$p : \mathcal{B}(H,K) \to \frac{\mathcal{B}(H,K)}{\mathcal{B}(H_1,K_1)}.$$

Qualquer $T \in \mathcal{B}(H,K)$ pode ser restrito à $H_1^{\perp}$ para obtermos um operador $T|_{H_1^{\perp}}$, o qual depende somente da imagem $p(T)$ de T no quociente. De fato, suponha que $p(T_1) = p(T_2) \Rightarrow T_1 - T_2 \in \mathcal{B}(H_1,K_1)$. Assim $T_1 = T_2 + X$, onde $X \in \mathcal{B}(H_1,K_1) \Rightarrow T_1|_{H_1^{\perp}} = (T_2+X)|_{H_1^{\perp}} = T_2|_{H_1^{\perp}}$. Donde,

$$\|p(T)\| \geq \max\{\|T|_{H_1^{\perp}}\|, \|T^*|_{K_1^{\perp}}\|\}$$

é trivial uma vez que

$$\begin{aligned}
\|p(T)\| &= \inf\Big\{\|T+X\| : X \in \mathcal{B}(H_1,K_1)\Big\} \\
&\geq \inf\Big\{\|(T+X)|_{H_1^{\perp}}\| : X \in \mathcal{B}(H_1,K_1)\Big\} \\
&= \|T|_{H_1^{\perp}}\|.
\end{aligned}$$

Similarmente, aplicando para T^* obtemos que

$$\|p(T)\| = \inf\Big\{\|T+X\| : X \in \mathcal{B}(H_1,K_1)\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\Big\{ \|(T+X)^*\| : X \in \mathcal{B}(H_1, K_1) \Big\} \\
&= \inf\Big\{ \|T^* + X^*\| : X^* \in \mathcal{B}(K_1, H_1) \Big\} \\
&\geq \inf\Big\{ \|(T^* + X^*)|_{K_1^\perp}\| : X^* \in \mathcal{B}(K_1, H_1) \Big\} \\
&= \|T^*|_{K_1^\perp}\|.
\end{aligned}
$$

$$\|p(T)\| \geq \|T^*|_{K_1^\perp}\|.$$

E assim, para qualquer $T \in \mathcal{B}(H, K)$,

$$\|p(T)\| \geq max\Big\{ \|T|_{H_1^\perp}\|, \|T^*|_{K_1^\perp}\| \Big\}.$$

Existe uma interpretação simples da observação acima em termos das matrizes de operadores. Um operador $T \in \mathcal{B}(H, K)$ pode ser visto como uma matriz

$$T = \begin{bmatrix} A & C \\ B & X \end{bmatrix}$$

onde $A : H_1^\perp \to K_1^\perp$, $B : H_1^\perp \to K_1$, $C : H_1 \to K_1^\perp$ *e* $X : H_1 \to K_1$. Então $\|p(T)\| = \inf\Big\{ \|T + X\| : X \in \mathcal{B}(H_1, K_1) \Big\}$ e como X varia em $\mathcal{B}(H_1, K_1)$, $\|T|_{H_1^\perp}\|$ é a norma da primeira coluna de T e $\|T^*|_{K_1^\perp}\|$ é a norma da primeira linha de T.

Faremos algumas considerações sobre a decomposição polar de um operador $T \in \mathcal{B}(H, K)$ que é dada por $T = US$, onde S é um operador positivo (a saber, $S = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$) e $U : H \to K$ é uma isometria parcial e do seu operador adjunto T^* que é dada por $T^* = V(TT^*)^{\frac{1}{2}}$. Desta forma temos que $T^* = V(TT^*)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T = (TT^*)^{\frac{1}{2}}V^*$, e portanto $T = (TT^*)^{\frac{1}{2}}V^* = V^*(V(TT^*)^{\frac{1}{2}}V^*)$ (a última igualdade ocorre pois V^*V projeta a imagem do operador $(TT^*)^{\frac{1}{2}}V^*$ no espaço em que a mesma se encontra). De posse destas informações vamos demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 3.1 *Seja T um operador limitado, cuja decomposição polar (e de seu adjunto) é da forma acima, então valem as seguintes afirmações:*

(i) se $T = U(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ então $U = V^*$ e $(T^*T)^{\frac{1}{2}} = U^*(TT^*)^{\frac{1}{2}}U$, donde resulta que $T = U(T^*T)^{\frac{1}{2}} = (TT^*)^{\frac{1}{2}}U$.

(ii) para qualquer $f \in \mathcal{C}([0, \|T\|^2])$, temos que $Uf(T^*T) = f(TT^*)U$.

Demonstração: (i) Este resultado segue da unicidade da decomposição polar (ver [18], pg:118). De fato, para usarmos este resultado, basta mostrar que $\mathrm{Ker}(V^*) = \mathrm{Ker}(V(TT^*)^{\frac{1}{2}}V^*)$.

Como $T = V^*(V(TT^*)^{\frac{1}{2}}V^*)$ temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(V^*) &= \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(V^*(V(TT^*)^{\frac{1}{2}}V^*)) \\ &\supseteq \mathrm{Ker}(V(TT^*)^{\frac{1}{2}}V^*)) \supseteq \mathrm{Ker}(V^*) \\ &\Rightarrow \mathrm{Ker}(V(TT^*)^{\frac{1}{2}}V^*)) = \mathrm{Ker}(V^*)\end{aligned}$$

(note que as inclusões seguem do fato que $\mathrm{Ker}(A \circ B) \supseteq \mathrm{Ker}(B)$). Assim, $U = V^*$ e $(T^*T)^{\frac{1}{2}} = U^*(TT^*)^{\frac{1}{2}}U$, donde resulta que $U(T^*T)^{\frac{1}{2}} = UU^*(TT^*)^{\frac{1}{2}}U \Rightarrow U(T^*T)^{\frac{1}{2}} = (TT^*)^{\frac{1}{2}}U$. O que conclui a prova deste caso.

(ii) Para mostrar esta afirmação, consideremos inicialmente a função f pertencendo ao conjunto dos polinômios.

Tomando $f(t) = t^n, \quad n \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}Uf(T^*T) &= U(T^*T)^n = U\underbrace{(T^*T)\cdots(T^*T)}_{\text{n vezes}} \\ &=^{(i)} (TT^*)^{\frac{1}{2}}U(T^*T)^{\frac{1}{2}}(T^*T)^{n-1} \\ &= (TT^*)^nU = f(TT^*)U.\end{aligned}$$

É fácil ver que isto vale para qualquer polinômio e assim, como o conjunto dos polinômios é denso em $\mathcal{C}([0, \|T\|^2])$ temos pelo teorema da aproximação de Weierstrass, que toda função em $\mathcal{C}([0, \|T\|^2])$ pode ser aproximada por polinômios e assim podemos concluir que $Uf(T^*T) = f(TT^*)U$ para toda $f \in \mathcal{C}([0, \|T\|^2])$.

$\square$

Lema 3.1 *Seja* $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ *onde* $T : H_0 \oplus H_1 \to K_0 \oplus K_1$. *Se* $Im\left(\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\right)$ *é ortogonal à* $Im\left(\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}\right)$ *então* $\|T\| \leq max\left\{\left\|\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\right\|, \left\|\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}\right\|\right\}$

Demonstração: Suponha que $Im\left(\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\right)$ é ortogonal à $Im\left(\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}\right)$. Seja $x \in H_0 \oplus H_1 \Rightarrow x =$

$x_0 + x_1, \quad x_0 \in H_0, x_1 \in H_1$. Considere ainda $T_0 = T|_{H_0}$ e $T_1 = T|_{H_1}$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= \|Tx_0 + Tx_1\|^2 = \|Tx_0\|^2 + \|Tx_1\|^2 \\
&= \|T_0x_0\|^2 + \|T_1x_1\|^2 \\
&\leq \|T_0\|^2\|x_0\|^2 + \|T_1\|^2\|x_1\|^2 \\
&\leq (\max\{\|T_0\|, \|T_1\|\})^2(\|x_0\|^2 + \|x_1\|^2) \\
&\leq (\max\{\|T_0\|, \|T_1\|\})^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

(Note que a segunda igualdade segue do fato dos vetores Tx_0 e Tx_1 serem ortogonais.)

Donde segue nosso resultado.

$\square$

Considere agora $H_0 = H_1^\perp$ e $K_0 = K_1^\perp$. Sendo $T : H \to K$ escreva $A = P_{K_0}T|_{H_0}, \quad B = P_{K_1}T|_{H_0}, \quad C = P_{K_0}T|_{H_1}$. Para qualquer $X \in \mathcal{B}(H_1, K_1)$ defina M_X como o operador de $H = H_0 \oplus H_1$ em $K = K_0 \oplus K_1$, cuja matriz com relação à decomposição na soma direta indicada é dada por:

$$M_X = \begin{bmatrix} A & C \\ B & X \end{bmatrix}.$$

Então como X varia em $\mathcal{B}(H_1, K_1)$, M_X varia em $T + \mathcal{B}(H_1, K_1) = \{Y : Y = T + V, V \in \mathcal{B}(H_1, K_1)\}$.

Lema 3.2 *Se T é uma contração e $T|_{H_0} : H_0 \to T(H_0)$ uma isometria então $Im(T|_{H_1})$ é ortogonal à $Im(T|_{H_0})$.*

Demonstração: Seja $\xi_1 \in H_1$ queremos mostrar que $T(\xi_1) \perp T(H_0)$. Como T é uma contração:

$$\|T(\xi_1 + \xi_0)\| = \|T(\xi_1) + T(\xi_0)\| \leq \|\xi_1 + \xi_0\|,$$

onde $\xi_1 \in H_1$ e $\xi_0 \in H_0$.

Note que

$$\|T(\xi_1) + T(\xi_0)\|^2 = \|T(\xi_1)\|^2 + 2Re\langle T(\xi_1), T(\xi_0)\rangle + \|T(\xi_0)\|^2.$$

Assim

$$\|T(\xi_1)\|^2 \quad + \quad 2Re\langle T(\xi_1), T(\xi_0)\rangle + \|T(\xi_0)\|^2 \leq \|\xi_1 + \xi_0\|^2 \leq \|\xi_1\|^2 + \|\xi_0\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|T(\xi_1)\|^2 + 2Re\langle T(\xi_1), T(\xi_0)\rangle \leq \|\xi_1\|^2, \qquad \forall \xi_0 \in H_0,$$

logo, ao considerarmos $\lambda\xi_0$ no lugar de ξ_0 , ainda teremos que

$$\begin{aligned} \|T(\xi_1)\|^2 &+ \lambda 2Re\langle T(\xi_1), T(\xi_0)\rangle \leq \|\xi_1\|^2 \\ &\Rightarrow Re\langle T(\xi_1), T(\xi_0)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Note ainda que para $\lambda = -i$ temos

$$0 = Re\langle T(\xi_1), T(-i\xi_0)\rangle = iRe\langle T(\xi_1), T(\xi_0)\rangle = Im\langle T(\xi_1), T(\xi_0)\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(\xi_1) \perp T(\xi_0) \quad &, \qquad \forall \xi_1 \in H_1 \quad \text{e} \quad \xi \in H_0 \\ \Rightarrow \qquad & T(H_1) \perp T(H_0). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1 *Para qualquer* $T \in \mathcal{B}(H,K)$*,* $\|p(T)\| = max\Big\{\|T|_{H_0}\|, \|T^*|_{K_0}\|\Big\}$*. E ainda, existem seqüências de números reais* $\{c_n\}$ *e* $\{d_n\}$ *tais que o limite fraco* $X = \lim_{n\to\infty} -c_n B(I - d_n A^*A)^{-1}A^*C$ *existe e satisfaz* $\|M_X\| = \|p(T)\|$*.*

Demonstração: Note que a desigualdade

$$\|p(T)\| \geq \max\{\|T|_{H_0}\|, \|T^*|_{K_0}\|\}$$

é trivial uma vez que

$$\begin{aligned} \|p(T)\| &= \inf\Big\{\|T + X\| : X \in \mathcal{B}(H_1, K_1)\Big\} \\ &\geq \inf\Big\{\|(T + X)|_{H_0}\| : X \in \mathcal{B}(H_1, K_1)\Big\} \\ &= \|T|_{H_0}\|. \end{aligned}$$

Similarmente, aplicando para T^* obtemos que

$$\|p(T)\| \quad = \quad \inf\Big\{\|T + X\| : X \in \mathcal{B}(H_1, K_1)\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\Big\{ \|(T+X)^*\| : X \in \mathcal{B}(H_1,K_1) \Big\} \\
&= \inf\Big\{ \|T^*+X^*\| : X^* \in \mathcal{B}(K_1,H_1) \Big\} \\
&\geq \inf\Big\{ \|(T^*+X^*)|_{K_0}\| : X^* \in \mathcal{B}(K_1,H_1) \Big\} \\
&= \|T^*|_{K_0}\|.
\end{aligned}
$$

$$\|p(T)\| \geq \|T^*|_{K_0}\|.$$

E assim, para qualquer $T \in \mathcal{B}(H,K)$,

$$\|p(T)\| \geq max\Big\{ \|T|_{H_0}\|, \|T^*|_{K_0}\| \Big\}.$$

Também, substituindo T por um múltiplo escalar dele mesmo, é suficiente mostrar que se tanto $\|T|_{H_0}\|$ quanto $\|T^*|_{K_0}\|$ não excedem 1, então existe um X da forma acima tal que $\|M_X\| = 1$.

Observe que, da igualdade $\|S\|^2 = \|S^*S\|$, segue

$$
\begin{aligned}
\|T|_{H_0}\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} A^* & B^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right\| = \|A^*A + B^*B\|
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|T^*|_{K_0}\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} A^* \\ C^* \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} A^* \\ C^* \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A^* \\ C^* \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* \\ C^* \end{bmatrix} \right\| = \|AA^* + CC^*\|.
\end{aligned}
$$

Vamos dividir a prova em dois casos:

Caso 1: $A^*A + B^*B = I_{H_0}$ e $AA^* + CC^* = I_{K_0}$ (estamos supondo aqui que $\|T|_{H_0}\| = 1$ e $\|T^*|_{K_0}\| = 1$).

Seja $A = U_A(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $B = U_B(B^*B)^{\frac{1}{2}}$ e $C = U_C(C^*C)^{\frac{1}{2}}$ a decomposição polar de A, B e C, respectivamente. Primeiramente vamos mostrar que $\|M_X\| = 1$, onde X é definido como $X = -U_BA^*U_C$. (A motivação para esta escolha de X segue do fato da primeira coluna, $T|_{H_0}$, de

M_X ser uma isometria, pois $(T|_{H_0})^*(T|_{H_0}) = (A^*A + B^*B) = I_{H_0}$ por hipótese, e disto segue que se M_X é uma contração, então a imagem da primeira coluna $T|_{H_0}$ deve ser ortogonal à imagem da segunda, $T|_{H_1}$. Isto é, devemos ter $\forall u \in H_0, v \in H_1, \quad (Au, Cv) + (Bu, Xv) = 0$, que é equivalente à $A^*C + B^*X = 0$. Esta última equação sugere a definição de $X = -(B^*)^{-1}A^*C$, caso B seja inversível e assim:

$$\begin{aligned}
(B^*)^{-1}A^*C &= [((B^*B)^{\frac{1}{2}}U_B^*)]^{-1}(A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*U_C(C^*C)^{\frac{1}{2}} \\
&= (U_B^*)^{-1}[(B^*B)^{\frac{1}{2}}]^{-1}(A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*(CC^*)^{\frac{1}{2}}U_C \\
&= U_B[(B^*B)^{\frac{1}{2}}]^{-1}(A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*(I - AA^*)^{\frac{1}{2}}U_C = (\dagger)
\end{aligned}$$

($(U_B^*)^{-1} = U_B$ pois $U_B = U_BU_B^*U_B$e como B é inversível temos que U_B é inversível e assim $I = U_BU_B^* \Rightarrow U_B^* = U_B^{-1}$)

$$\begin{aligned}
(\dagger) &= U_B[(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}]^{-1}(A^*A)^{\frac{1}{2}}(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*U_C \\
&= U_B(A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*U_C \\
&= U_BA^*U_C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (B^*)^{-1}A^*C = U_BA^*U_C$$

Aqui e daqui por diante usaremos repetidamente os fatos (i) e (ii) da proposição (3.1).)

Agora,

$$\begin{aligned}
B^*X &= B^*(-U_BA^*U_C) = -(B^*B)^{\frac{1}{2}}U_B^*U_BA^*U_C \\
&= -(B^*B)^{\frac{1}{2}}A^*U_C,
\end{aligned}$$

pois $U_B^*U_B$ é a projeção no $\overline{Im(B^*)} = (Ker(B^*B)^{\frac{1}{2}})^{\perp}$.

Assim

$$\begin{aligned}
B^*X &= -(B^*B)^{\frac{1}{2}}A^*U_C = -(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}(A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*U_C \\
&= -(A^*A)^{\frac{1}{2}}(I - A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*U_C \\
&=^{(\ddagger)} -(A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*(I - AA^*)^{\frac{1}{2}}U_C \\
&= -(A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*(CC^*)^{\frac{1}{2}}U_C \\
&= -A^*U_C(C^*C)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \quad -A^*C,$$

Em (‡) usamos a proposição (3.1), com $f(A^*A) = (I - A^*A)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f(A^*A)U_A^* = U_A^* f(A^*A)$.

O fato de $B^*X = -A^*C$ mostra que com esta escolha de X, a imagem de $M_X|_{H_0}$ é de fato ortogonal à imagem de $M_X|_{H_1}$.

Dado isto, segue pelo lema (3.1) que $\|M_X\| \leq 1$ se e somente se tanto $\|M_X|_{H_0}\| \leq 1$ (o que é verdade pois $\|M_X|_{H_0}\|^2 = \|A^*A + B^*B\| = \|I\| = 1$) quanto $\|M_X|_{H_1}\| \leq 1$. Agora, note que $\|M_X|_{H_1}\|^2 = \|C^*C + X^*X\|$ e :

$$\begin{aligned}
C^*C + X^*X &= [U_C(C^*C)^{\frac{1}{2}}]^*[U_C(C^*C)^{\frac{1}{2}}] + X^*X \\
&= [(CC^*)^{\frac{1}{2}}U_C]^*[(CC^*)^{\frac{1}{2}}U_C] + U_C^*A\underbrace{U_B^*U_B}_{\leq I}A^*U_C \\
&\leq U_C^*(CC^*)^{\frac{1}{2}}(CC^*)^{\frac{1}{2}}U_C + U_C^*AA^*U_C \\
&= U_C^*(CC^*)U_C + U_C^*AA^*U_C \\
&= U_C^*(CC^* + AA^*)U_C \\
&= U_C^*IU_C \\
&= U_C^*U_C \\
&\leq I,
\end{aligned}$$

donde, $\|M_X|_{H_1}\| \leq 1$, temos que $\|M_X\| \leq 1$.

$\Bigg($ Observe que

$$M_X = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D+Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & X \end{bmatrix}. \Bigg)$$

Portanto,

$$\|p(T)\| \leq \|T + Y\| = \|M_X\| \leq 1 = \max\{\|T|_{H_0}\|, \|T^*|_{K_0}\|\}.$$

<u>Caso 2</u>: $A^*A + B^*B \leq I_{H_0}$ e $AA^* + CC^* \leq I_{K_0}$. Sejam,

$$\begin{aligned}
K_2 &= \overline{[Im(I_{H_0} - A^*A - B^*B)^{\frac{1}{2}}]} \\
H_2 &= \overline{[Im(I_{K_0} - AA^* - CC^*)^{\frac{1}{2}}]} \\
H_1' &= H_1 \oplus H_2 \\
K_1' &= K_1 \oplus K_2.
\end{aligned}$$

Defina,

$$\begin{aligned} B^{'} &:= B \oplus (I_{H_0} - A^*A - B^*B)^{\frac{1}{2}}) : H_0 \to K_1^{'} \quad \text{e} \\ C^{'} &: H_1^{'} \to K_0 \end{aligned}$$

como o operador cujo adjunto é

$$C^{'*} = C^* \oplus (I_{K_0} - AA^* - CC^*)^{\frac{1}{2}} : K_0 \to H_1^{'}.$$

Então:

$$\begin{aligned} A^*A + B^{'*}B^{'} &= I_{H_0} \\ AA^* + C^{'}C^{'*} &= I_{K_0}, \end{aligned}$$

pois

$$A^*A + B^{'*}B^{'} \quad = \quad A^*A + B^*BI - A^*A - B^*B = I$$

uma vez que

$$\begin{aligned} B^{'*} \quad &= \begin{bmatrix} B^* & I_{H_0} - A^*A - B^*B)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad B^{'*}B^{'} &= \begin{bmatrix} B^* & (I_{H_0} - A^*A - B^*B)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ (I_{H_0} - A^*A - B^*B)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ = \quad & B^*B + (I_{H_0} - A^*A - B^*B) = I_{H_0} - A^*A. \end{aligned}$$

Analogamente obtemos que $AA^* + C^{'}C^{'*} = I_{K_0}$. E assim pelo que já foi provado no caso 1, existe um operador $Y : H_1^{'} \to K_1^{'}$ tal que o operador $N_Y : H_0 \oplus H_1^{'} \to K_0 \oplus K_1^{'}$, definido pela matriz

$$N_Y = \begin{bmatrix} A & C^{'} \\ B^{'} & Y \end{bmatrix}$$

satisfaz $\|N_Y\| = 1$. Observe que o operador N_Y pode ser representado por uma matriz 3 x 3 com relação à decomposição em soma direta $H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$ e $K_0 \oplus K_1 \oplus K_2$,

$$N_Y = \begin{bmatrix} A & C & (I_{K_0} - AA^* - CC^*)^{\frac{1}{2}} \\ B & Y_1 & Y_3 \\ (I_{H_0} - A^*A - B^*B)^{\frac{1}{2}} & Y_2 & Y_4 \end{bmatrix}$$

onde $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_3 \\ Y_2 & Y_4 \end{bmatrix}$ é a matriz que representa Y com relação à decomposição em soma direta $H_1^{'} = H_1 \oplus H_2$ e $K_1^{'} = K_1 \oplus K_2$.

Como $\|N_Y\| \leq 1$ é óbvio que a norma da submatriz $\begin{bmatrix} A & C \\ B & Y_1 \end{bmatrix}$ não excede 1 e portanto encontramos um operador $X = Y_1$ tal que $\|M_X\| \leq 1$.

Finalmente, mostremos que se Y é definido por $Y = -U_{B'} A^* U_{C'}$ e se $\|A\| < 1$ então $X = Y_1$ é dado pela fórmula explícita $X = -B(I - A^*A)^{-1}A^*C$ e quando $\|A\| = 1$, X é o limite fraco de uma seqüência de operadores correspondendo à substituição de A por cA com $0 < c < 1$.

Assuma que $\|A\| < 1$. Como $C^{'}C^{'*} = I_{K_0} - AA^*$, temos que $C^{'}C^{'*}$ é inversível (pois $\|C^{'}C^{'*}\| = \|I_{K_0} - AA^*\| \geq \|I_{K_0}\| - \|AA^*\| = 1 - \|A\|^2 > 1 - 1 = 0 \Rightarrow \exists a > 0$ tal que $\|C^{'}C^{'*}\| > a$) e ainda

$$\begin{aligned}
U_{C'}|_{H_1} &= (C^{'}C^{'*})^{-\frac{1}{2}}(C^{'}C^{'*})^{\frac{1}{2}}U_{C'}|_{H_1} \\
&= (C^{'}C^{'*})^{-\frac{1}{2}}U_{C'}(C^{'*}C^{'})^{\frac{1}{2}}|_{H_1} \\
&= (C^{'}C^{'*})^{-\frac{1}{2}}C^{'}|_{H_1} \\
&= (C^{'}C^{'*})^{-\frac{1}{2}}C \\
&= (I_{K_0} - AA^*)^{-\frac{1}{2}}C,
\end{aligned}$$

e se P denota a projeção de $K_0 \oplus K_1^{'}$ em $K_0 \oplus K_1$,

$$\begin{aligned}
PU_B^{'}A^* &= PB^{'}(B^{'*}B)^{-\frac{1}{2}}A^* \\
&= PB^{'}(I_{H_0} - A^*A)^{-\frac{1}{2}}A^* \\
&= B(I_{H_0} - A^*A)^{-\frac{1}{2}}A^*.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
X &= PY|_{H_1} = -PU_B^{'}A^*U_C^{'}|_{H_1} \\
&= -B(I_{H_0} - A^*A)^{-\frac{1}{2}}A^*(I_{K_0} - AA^*)^{-\frac{1}{2}}C.
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$A^*(I_{K_0} - AA^*)^{-\frac{1}{2}} = (A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^*(I_{K_0} - AA^*)^{-\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A^*A)^{\frac{1}{2}}(I_{H_0} - A^*A)^{-\frac{1}{2}}U_A^* \\
&= (I_{H_0} - A^*A)^{-\frac{1}{2}}(A^*A)^{\frac{1}{2}}U_A^* \\
&= (I_{H_0} - A^*A)^{-\frac{1}{2}}A^*,
\end{aligned}
$$

observe que aqui usamos novamente a proposição (3.1) com A^* no lugar de T e $f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ e assim combinando estas duas equações obtemos

$$X = -B(I - A^*A)^{-1}A^*C.$$

Finalmente, para tratar do caso em que $\|A\| \leq 1$, seja $0 < c < 1$ e $X_c = -B(I - c^2A^*A)^{-1}A^*C$. Do que já foi provado, cada matriz $\begin{bmatrix} cA & C \\ B & X_c \end{bmatrix}$ tem no máximo norma 1, e da compacidade da bola unitária de operadores na topologia fraca, existe uma seqüência $0 < c_1 < c_2 < ... < c_n < ... \longrightarrow 1$ tal que os operadores X_{c_n} convergem fracamente para um operador X, donde $\begin{bmatrix} A & C \\ B & X \end{bmatrix}$ tem no máximo norma 1.

E assim fica provado que

$$\|p(T)\| \leq \max\Big\{\|T|_{H_0}\|, \|T^*|_{K_0}\|\Big\}.$$

O que conclui nossa demonstração.

$\square$

Capítulo 4

O Teorema de Nehari

4.1 Matrizes e Operadores de Hankel

Considere o espaço $H^2(\mathbb{S}^1)$ e o operador shift unilateral S.

Definição 4.1 *Um operador de Hankel $H : H^2(\mathbb{S}^1) \to H^2(\mathbb{S}^1)$ é um operador que satisfaz:*

$$S^*H = HS.$$

Uma matriz de Hankel é uma matriz unilateral infinita $(\lambda_{n,m}) = (a_{n+m})$,$n, m \geq 0$ cujas entradas satisfazem:

$$\lambda_{n,m} = \lambda_{n+1,m-1} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad m > 0.$$

Ou seja, uma matriz de Hankel é uma matriz cujas diagonais perpendiculares à diagonal principal são constantes, donde:

$$H = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}. \qquad (I)$$

Observação 4.1 *A matriz que representa um operador de Hankel H é uma matriz de Hankel. De fato, sejam $\lambda_{i,j}$ as entradas da matriz que representa o operador de Hankel H. Assim,*

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j} &= \langle He_j, e_i\rangle = \langle HSe_{j-1}, e_i\rangle \\ &= \langle S^*He_{j-1}, e_i\rangle = \langle He_{j-1}, Se_i\rangle = \langle He_{j-1}, e_{i+1}\rangle \end{aligned}$$

$$= \lambda_{i+1,j-1}.$$

Portanto, a matriz que representa um operador de Hankel é uma matriz de Hankel.

Seja $M_m = \overline{span}\{\cdots e_{-2}, e_{-1}, e_0, \cdots, e_m\}$. Assim, se reordenarmos os elementos da base de $H^2(\mathbb{S}^1)$, através de um operador unitário

$$\begin{aligned} U : \quad H^2(\mathbb{S}^1) &\to M_0 \\ e_n &\longmapsto e_{-n}, \end{aligned}$$

teremos que a matriz de Hankel H com relação à esta base reordenada de $H^2(\mathbb{S}^1)$ é da seguinte forma

$$H = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \end{bmatrix}. \qquad (II)$$

Assim, $U \circ H$ tem a forma dada em (II). Sendo assim, usaremos a caracterização dada em (II) quando nos referirmos à uma matriz de Hankel.

Exemplo 4.1 *Vejamos agora um exemplo de operador de Hankel.*

Seja

$$\begin{aligned} H_\varphi : \quad H^2(\mathbb{S}^1) &\to H^2(\mathbb{S}^1) \\ f &\mapsto P(\varphi)(f \circ conj) \end{aligned}$$

onde φ é uma função fixa em $L^\infty(\mathbb{S}^1)$, P denota a projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{S}^1)$ sobre $H^2(\mathbb{S}^1)$ e a função $conj$ é definida por

$$\begin{aligned} conj : \quad \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ e^{i\theta} &\mapsto e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

Vamos verificar que H_φ é um operador de Hankel. De fato, observando que

$$H_\varphi(e_j)(e^{i\theta}) = P(\varphi)(e_j \circ conj)(e^{i\theta}) = P(\varphi(e^{i\theta})e^{-ij\theta}),$$

e que

$$\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)e^{in\theta} \quad (\textit{ convergência na } \|.\|_2)$$

temos,

$$\begin{aligned}\varphi(e^{i\theta})e^{-ij\theta} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(n)e^{in\theta}e^{-ij\theta}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(n)e^{i(n-j)\theta}.(*)\end{aligned}$$

Fazendo $m = n - j$ $(n = j + m)$ *temos que*

$$(*) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(m+j)e^{im\theta}.$$

Donde,

$$H_{\varphi}(e_j)(e^{i\theta}) = P(\varphi(e^{i\theta})e^{-ij\theta}) = \sum_{n\geq 0}\widehat{\varphi}(m+j)e^{im\theta}.$$

Portanto,

$$\langle H_{\varphi}(e_j), e_k\rangle = \widehat{\varphi}(j+k),$$

o que mostra que o operador H_{φ} *é um operador de Hankel.*

Teorema 4.1 ***(Teorema de Nehari)*** *Seja* $H : H^2(\mathbb{S}^1) \to H^2(\mathbb{S}^1)$ *um operador limitado tal que sua matriz é uma matriz de Hankel como em (II). Então existe* $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{S}^1)$ *tal que* $\|H\| = \|\varphi\|_{\infty}$ *e* $\widehat{\varphi}(n) = \lambda_{n,0}, \quad \forall n \geq 0.$

Demonstração: Seja H a matriz de Hankel que representa o operador limitado H. Vamos usar a matriz H na forma (II). Queremos mostrar a existência de uma função φ mensurável e limitada que satisfaça as propriedades acima. Para tal, vamos construir um operador $\tilde{H} : H^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$ com matriz, na base canônica reordenada, por U, na forma Hankel, ou seja, que as diagonais paralelas a diagonal principal são constantes.

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz $\tilde{H}$ pode ser vista como uma matriz de blocos, da seguinte forma:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H \\ T \end{bmatrix},$$

onde T é uma matriz de Toeplitz dada por:

$$T = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

e assim teremos pelo teorema (2.2), a existência de uma $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $\widehat{\varphi}(n) = a_n, \quad \forall n \geq 0$.

Sendo assim, vamos à construção de $\tilde{H}$. Primeiramente vamos construir um operador $H_1 : H^2(\mathbb{S}^1) \to M_1$ cuja matriz que representa este operador tem a seguinte forma:

$$H_1 = \left[\begin{array}{c|cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \hline a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \end{array}\right]$$

e que satisfaz $\|H_1\| = \|H\|$.

É claro que a construção deste operador envolve somente a escolha de a_{-1}. E para esta escolha, vamos usar o teorema (3.1) escrevendo:

$$H_1 = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline X_1 & C \end{array}\right],$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \end{bmatrix}$$

e $X_1 = \begin{bmatrix} a_{-1} \end{bmatrix}$.

Note que as submatrizes $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$ tem a mesma norma que a matriz H, uma vez que estas matrizes são da forma UHV onde U e V são isometrias e portanto têm norma 1. E assim, pelo teorema (3.1), existe $X_1 = \begin{bmatrix} a_{-1} \end{bmatrix}$ tal que $\|H_1\| = \|H\|$, donde X_1 é dado pelo limite fraco indicado no mesmo teorema.

Suponha agora que exista $H_{k-1} : H^2(\mathbb{S}^1) \to M_{k-1}$ tal que $\|H_{k-1}\| = \|H\|$ e além disso as entradas matriz H_{k-1} coincidem com as entradas da matriz H, em parte (conforme a ilustração abaixo) e são constantes ao longo das diagonais.

$$H_{k-1} = \left[\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \hline a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & & & & \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-4} & \cdots \end{array}\right]$$

Sendo assim, aplicando novamente o teorema (3.1) para o operador $H_k : H^2(\mathbb{S}^1) \to M_k$ cuja matriz que o representa é dada por:

$$H_k = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline X_k & C \end{array}\right],$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{k-3} & a_{k-4} & a_{k-5} & \cdots \\ a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-4} & \cdots \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & a_{k-4} & \cdots \end{bmatrix}$$

e $X_k = \begin{bmatrix} a_k \end{bmatrix}$ e assim $\|H_k\| = \|H\|$. Donde segue que a seqüência de operadores $\{H_n\}$ é uma seqüência limitada, isto é, $H_n \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{S}^1), L^2(\mathbb{S}^1)), \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, pela compacidade da bola unitária de operadores na topologia fraca, segue que existe uma subseqüência de $\{H_n\}$, a saber $\{H_{n_l}\}$, convergindo fracamente para um operador $\tilde{H}$. Para simplificar a notação, vamos denotar a subseqüência por $\{H_n\}$

Observe ainda que as entradas da matriz $\tilde{H}$ são dadas por:

$$\langle \tilde{H}(e_j), e_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle H_n(e_j), e_i \rangle.$$

E como a matriz $\tilde{H}$ é da forma

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H \\ \\ T \end{bmatrix},$$

como acima, fica provada a existência da função φ mensurável e limitada tal que $\widehat{\varphi}(n) = a_n, \quad \forall n \geq 0$.

Para finalizar, vamos mostrar que $\|\tilde{H}\| = \|\varphi\|_\infty$. Para tal, sabendo que $\|\tilde{H}\| = \|H\|$, por construção, e que $\|T\| = \|\varphi\|_\infty$, pelo teorema (2.2), basta mostrar que $\|H\| = \|T\|$. De fato, sabemos que a norma de uma matriz $\tilde{H}$ é dada por $\|\tilde{H}\| = \sup\{\|\tilde{H}_n\|\}$, para $n \in \mathbb{N}$, onde $\tilde{H}_n$ denota os blocos da matriz $\tilde{H}$, que conforme n cresce a matriz $\tilde{H}_n$ se aproxima da matriz $\tilde{H}$. Assim, como a matriz T pode ser vista como um bloco da matriz $\tilde{H}$ temos que $\|T\| \leq \|\tilde{H}\| = \|H\|$. Por outro lado, temos que $\|\tilde{H}_n\| = \|T_n\| \leq \|T\|$, onde T_n é a própria matriz $\tilde{H}_n$ deslocada diagonalmente para baixo, e note a desigualdade ocorre do fato de que $\|T\| = \sup\{\|T_n\|\}$. E como $\|H\| = \sup\{\|H_n\|\} \leq \|T\|$ temos que: $\|H\| = \|T\|$.

Portanto fica provado que $\|\tilde{H}\| = \|\varphi\|_\infty$.

□

Exemplo 4.2 ***(Matriz de Hilbert)***

Considere H denotando a matriz de Hilbert, que é dada por

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Note que esta matriz é uma matriz de Hankel, e desejamos encontrar uma função $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{S}^1)$ tal que os coeficientes de Fourier desta função, com índices não negativos, sejam, exatamente, as entradas da matriz de Hilbert H.

Considere a função $\varphi(z) = \frac{1}{i}Arg(z)$. Notando que $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{S}^1)$ vamos calcular os coeficientes de Fourier desta função.

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(n) &= \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) \cdot z^{-n} d\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{i} Arg(e^{i\theta}) \cdot e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \theta \cdot [cos(-n\theta) + isen(-n\theta)] d\theta = \frac{i}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, por um comentário feito no início deste capítulo, temos que $H = H_{\varphi}$ e assim podemos concluir que a matriz de Hilbert H representa um operador contínuo.

Capítulo 5

O Teorema de Hartmann

Consideremos o operador de Hankel no espaço de Hardy $H^2(\mathbb{S}^1)$ (conforme visto no capítulo anterior) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_\varphi : \quad H^2(\mathbb{S}^1) &\to H^2(\mathbb{S}^1) \\ f \quad &\mapsto P(\varphi \cdot f \circ conj) \end{aligned}$$

onde φ é uma função fixa em $L^\infty(\mathbb{S}^1)$, P denota a projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{S}^1)$ sobre $H^2(\mathbb{S}^1)$ e a função $conj$ é definida por

$$\begin{aligned} conj : \quad \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ e^{i\theta} &\mapsto e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

Vimos no capítulo anterior, que sendo S o shift unilateral em $H^2(\mathbb{S}^1)$, que é dado por $S(f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta})$, Nehari provou que toda solução limitada para a equação de operadores $S^*H = HS$ é da forma $H = H_\varphi$ onde $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ e também que φ pode ser escolhida de forma que $\|H\| = \|\varphi\|_\infty$.

Nosso objetivo agora é provar que se H é um operador compacto que é representado por uma matriz Hankel, então podemos escolher tal função φ em $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, onde este é exatamente o conteúdo do teorema de Hartmann. Para isto usaremos o teorema de F. e M. Riesz (ver apêndice) e a caracterização de operadores Hankel dada por Nehari em (4.1).

Observação 5.1 *Sabemos que para uma dada função $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ os coeficientes de Fourier de f*

são dados por

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{S}^1} f(z) \cdot z^{-n} d\lambda(z), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

onde λ denota a medida de Lebesgue.

Seja μ uma medida finita Borel complexa em $\mathbb{S}^1$, então define-se a transformada de Fourier da medida μ por

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{S}^1} z^{-n} d\mu(z), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sabendo que $L^1(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$(pois a cada $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ podemos associar uma medida $f \cdot \mu$), onde $\mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$ denota o conjunto de todas as medidas finitas borelianas em $\mathbb{S}^1$. Assim, definindo

$$H^1(\mathbb{S}^1) = \{f \in L^1(\mathbb{S}^1) : \widehat{f}(n) = 0 \quad \forall n < 0\}$$

teremos que para $f \in H^1(\mathbb{S}^1)$,

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{S}^1} f(z) \cdot z^{-n} d\lambda(z) = \int_{\mathbb{S}^1} z^{-n} \cdot f(z) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{S}^1} z^{-n} d\mu(z),$$

onde $\mu = f \cdot \lambda$.

Agora, de posse dessa observação e dos lemas a seguir, estamos aptos para demonstrar o teorema de Hartmann.

Seja $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ o espaço dos operadores Hankel limitados e $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ denotando o espaço dos operadores Hankel compactos.

Lema 5.1 *O espaço de Banach $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ é isomorfo ao segundo dual do espaço de Banach $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$.*

Demonstração: Esta prova segue de um resultado abstrato de Gellar e Page [16].

Primeiramente, o problema é mostrar que todo operador Hankel é o limite na topologia fraca de uma seqüência de operadores Hankel compactos e isso pode ser provado sem o conhecimento a priori de quais operadores Hankel são compactos, e foi assim que Gellar e Page provaram isto. De fato, do teorema 1 de [16], pg:437 (ver A.4), temos que todo operador em $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ é o limite fraco de uma seqüência de operadores em $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Assim, pelo teorema 2 de [16], pg:438 (ver A.4), temos que $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ é isomorfo ao segundo dual de $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$.

$\square$

Lema 5.2 *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços vetoriais normados, $inc.can_X : X \to X^{**}$, $inc.can_Y : Y \to Y^{**}$,$A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ e $B : \mathcal{X}^{**} \to \mathcal{Y}^{**}$ isometrias tais que $B \circ inc.can_X. = inc.can_Y. \circ A$*

Se a imagem de B é $\mathcal{Y}^{**}$, então a imagem de A é $\mathcal{Y}$.

Demonstração: Esta demonstração é uma conseqüência do teorema de Hahn-Banach e do fato que um espaço normado é denso, na topologia fraca-estrela, no seu segundo dual.(Ver [2])

□

Defina

$$\mathcal{A}_0 = \overline{span}\{z^n : n \geq 1\},$$

um subconjunto de $L^2(\mathbb{S}^1)$ e mostraremos que esta definição de A_0 é equivalente à

$$\mathcal{A}_0 = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad n \leq 0\}.$$

De fato, por um lado é fácil ver que $\mathcal{A}_0 = \overline{span}\{z^n : n \geq 1\} \subseteq \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad n \leq 0\}$. Por outro lado, seja $f \in \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad n \leq 0\}$, e objetivamos escrever f como um limite de uma combinação linear dos elementos de $\{z^n : n \geq 1\}$, sendo assim, considere $\widehat{f}(n)$, denotando os coeficientes de Fourier da função f, e a série de Fourier dessa função, que é dada por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) z^n = \sum_{n \geq 1} \widehat{f}(n) z^n$$

, .

Considere ainda,

$$S_M = \sum_{n=0}^{M} \widehat{f}(n) z^n = \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n) z^n \quad (\text{ pois } \widehat{f}(n) = 0 \quad \forall n \leq 0.)$$

denotando a m-ésima soma parcial da série de Fourier acima.

Seja

$$C_N = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_N}{N}$$

denotando a média de Cesaro da série de Fourier de f, como $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ temos, pelo teorema da convergência de Cesaro (ver [6]), que $C_N \to f$ uniformemente em $\mathbb{S}^1$ e assim, como cada S_N é uma combinação linear dos z^n com $n \geq 1$,temos que cada C_N também é uma combinação linear de z^n tais que $n \geq 1$, e assim podemos concluir que $f \in A_0$. Portanto, $\{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad n \leq 0\} \subseteq A_0$, donde

$$\{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad n \leq 0\} = A_0.$$

Este conjunto $\mathcal{A}_0$, juntamente com os lemas anteriores, nos auxiliará na demonstração do seguinte resultado.

Teorema 5.1 ***(Teorema de Hartmann)****Um operador $H : H^2(\mathbb{S}^1) \to H^2(\mathbb{S}^1)$ é representado por uma matriz Hankel compacta se e somente se existe uma função $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ tal que $H = H_\varphi$ e $\|H\| = \|\varphi\|_\infty$.*

Demonstração: Usando o teorema de F e M. Riesz e o teorema da representação de Riesz para funcionais lineares limitados em $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, vamos mostrar que o espaço de Hardy $H^1(\mathbb{S}^1)$ é o espaço dual de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0$.

Seja $\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{C}$ contínua, então

$$\varphi \mid_{\mathcal{A}_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(z^n) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Sabendo que

$$(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0)^* \simeq \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)^* : f \mid \mathcal{A}_0 = 0\}$$

e notando que $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)^* \simeq \mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$ (onde $\mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$ é o espaço das medidas complexas e finitas), temos que

$$(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0)^* = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^1) : \mu \mid_{\mathcal{A}_0} = 0\}.$$

Observe que

$$\mu|_{\mathcal{A}_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(z^n) = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = \int_{\mathbb{S}^1} z^{-(-n)} d\mu(z) = \widehat{\mu}(-n), \quad \forall n \geq 1.$$

Assim, pelo teorema de F e M. Riesz temos que μ é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue, donde segue que $\mu = f \cdot \lambda$ para alguma $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$.

Note ainda que

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \int_{\mathbb{S}^1} f(z) \cdot z^{-k} d\lambda(z) = \int_{\mathbb{S}^1} z^{-k} \cdot f(z) d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} z^{-k} d\mu(z) = \widehat{\mu}(k),\end{aligned}$$

donde segue que $\widehat{\mu}(k) \quad = \quad \widehat{f}(k) = 0 \quad \forall k \leq -1$. Portanto, $f \in H^1(\mathbb{S}^1)$. Logo $\mu \in H^1(\mathbb{S}^1)$ (pois $\mu = f \cdot \lambda, \quad \text{quando} \quad \mu \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \quad \text{e} \quad \mu|_{\mathcal{A}_0} = 0)$.

Supondo agora que $f \in H^1(\mathbb{S}^1)$, ou seja, que $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ e $\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall n < 0$, e definindo a medida μ como $\mu = f \cdot \lambda$, temos que $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^1)$. Note que $\forall \quad n < 0$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(n) &= \int_{\mathbb{S}^1} z^{-n} d\mu(z) = \int_{\mathbb{S}^1} f(z) \cdot z^{-n} d\lambda(z) = \widehat{f}(n) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \mu|_{\mathcal{A}_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \in \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^1) : \mu|_{\mathcal{A}_0} = 0\} = \\
&= \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)^* : f|_{\mathcal{A}_0} = 0\} = (\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0)^*.
\end{aligned}$$

Portanto

$$(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0)^* = \{\mu \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : \mu|_{\mathcal{A}_0} = 0\} = H^1(\mathbb{S}^1).$$

Sejam $H^\infty(\mathbb{S}^1)$ o espaço de todas as funções $f \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ para as quais os coeficientes de Fourier de índices negativos são nulos e H_0^∞ denotando a classe das funções de $H^\infty(\mathbb{S}^1)$ tais que $\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall n \leq 0$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $L^\infty(\mathbb{S}^1)/H_0^\infty$ é o dual de $H^1(\mathbb{S}^1)$ e para isto, primeiramente vamos mostrar que H_0^∞ é o anulador de $H^1(\mathbb{S}^1)$.

Lembre que o anulador de $H^1(\mathbb{S}^1)$, que denotaremos por $An(H^1(\mathbb{S}^1))$, é definido como

$$An(H^1(\mathbb{S}^1)) = \{\varphi \in (L^1(\mathbb{S}^1))^* : \varphi(f) = 0, \quad \forall f \in H^1(\mathbb{S}^1)\},$$

ou equivalentemente,

$$An(H^1(\mathbb{S}^1)) = \{g \in L^\infty(\mathbb{S}^1) : \int\limits_{\mathbb{S}^1} g(z) f(z) dz = 0, \quad \forall f \in H^1(\mathbb{S}^1)\}.$$

Assim, dada $\varphi \in An(H^1(\mathbb{S}^1))$ temos que

$$\begin{aligned}
&\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1) \qquad e \quad \int\limits_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H^1(\mathbb{S}^1) \\
&\therefore \qquad \int\limits_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) z^n dz = 0, \quad \forall n \geq 0 \quad (\text{ pois } z^n \text{ pertence à } H^1(\mathbb{S}^1),\ n \geq 0) \\
&\Rightarrow \qquad \widehat{\varphi}(-n) = 0, \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad \forall n \leq 0 \Rightarrow \varphi \in H_0^\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $An(H^1(\mathbb{S}^1)) \subseteq H_0^\infty$.

Suponhamos agora que $\varphi \in H_0^\infty$ e mostremos que $\varphi \in An(H^1(\mathbb{S}^1))$. Como $\varphi \in H_0^\infty$ temos que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ e $\widehat{\varphi}(n) = 0, \forall n \leq 0$ (pela definição de H_0^∞), donde

$$\widehat{\varphi}(-n) = 0 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) z^n dz = 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{5.1}$$

Usaremos a equação (5.1) para mostrar que $\int\limits_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) f(z) dz = 0, \quad \forall f \in H^1(\mathbb{S}^1)$. Para isto, é importante notar que qualquer função de $H^1(\mathbb{S}^1)$ pode ser escrita como o produto de duas funções de $H^2(\mathbb{S}^1)$ (ver [15] , pg:34) , assim dada $f \in H^1(\mathbb{S}^1)$ existem $g, h \in H^2(\mathbb{S}^1)$ tais que $f = g \cdot h$, onde $g(z) = \sum\limits_{k \geq 0} \alpha_k z^k$ e $h(z) = \sum\limits_{l \geq 0} \beta_l z^l$. Dessa forma,

$$f(z) = g(z)h(z) = \sum_{n=k+l \geq 0} \gamma_n z^n, \quad \gamma_n = \alpha_k \cdot \beta_l,$$

uma vez que a série acima converge na norma $\|.\|_1$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k = \lim_{n \to \infty} g_n(z) \\ h(z) & \lim_{n \to \infty} \sum_{l=0}^{n} \beta_l z^l = \lim_{n \to \infty} h_n(z). \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que, como $f_n(z) = (\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k)(\sum\limits_{l=0}^{n} \beta_l z^l) = \sum\limits_{p=k+l=0}^{n} \gamma_p z^p = g_n(z)h_n(z)$, $f_n \to f$ na norma $\|.\|_1$. De fato

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 = \|g_n h_n - gh\|_1 &\leq \|g_n h_n - g_n h\|_1 + \|g_n h - gh\|_1 \\ &= \|g_n(h_n - h)\|_1 + \|(g_n - g)h\|_1 \\ &\leq \underbrace{\|g_n\|_2}_{limitado} \|h_n - h\|_2 + \|g_n - g\|_2 \|h\|_2 \to 0 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) f(z) dz &= \int\limits_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) \sum_{n \geq 0} \gamma_n z^n dz \\ &= \sum_{n \geq 0} \gamma_n \underbrace{\int\limits_{\mathbb{S}^1} \varphi(z) z^n dz}_{0} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi \in An(H^1(\mathbb{S}^1))$ e assim $H_0^\infty \subseteq An(H^1(\mathbb{S}^1))$.

$$\therefore \qquad H_0^\infty = An(H^1(\mathbb{S}^1)).$$

Agora podemos mostrar $L^\infty(\mathbb{S}^1)/H_0^\infty$ é o dual de $H^1(\mathbb{S}^1)$. De fato, como $L^\infty(\mathbb{S}^1)$ é o dual de $L^1(\mathbb{S}^1)$ e H_0^∞ é o anulador de $H^1(\mathbb{S}^1)$, defina uma aplicação linear Λ por

$$\begin{aligned} \Lambda : (L^1(\mathbb{S}^1))^* &\rightarrow (H^1(\mathbb{S}^1))^* \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{H^1(\mathbb{S}^1)} \end{aligned}$$

que é sobrejetora, pelo teorema de Hahn - Banach. A partir daí, definimos uma nova aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda} : (L^1(\mathbb{S}^1))^*/H_0^\infty &\rightarrow (H^1(\mathbb{S}^1))^* \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{H^1(\mathbb{S}^1)} \end{aligned}$$

que é injetora , que também é sobrejetora (característica herdada de Λ),e além disso esta aplicação é uma isometria, de fato: tomando $\overline{\varphi} \in (L^1(\mathbb{S}^1))^*/H_0^\infty$, temos que $\widetilde{\Lambda}(\overline{\varphi}) = \varphi \in H^1(\mathbb{S}^1))^*$. Estendendo φ, por Hahn-Banach, a ψ em $(L^1(\mathbb{S}^1))^*$ temos que

$$\psi \in (L^1(\mathbb{S}^1))^* \quad \text{e} \quad \widetilde{\Lambda}(\overline{\psi}) = \varphi = \widetilde{\Lambda}(\overline{\varphi}) \Rightarrow \overline{\psi} = \overline{\varphi},$$

(esta implicação vem do fato de $\widetilde{\Lambda}$ ser injetora). Assim,

$$\|\widetilde{\Lambda}(\overline{\varphi})\| = \|\varphi\| = \|\psi\| \geq \|\overline{\psi}\| = \|\overline{\varphi}\|.$$

Por outro lado, seja $h \in H_0^\infty$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\Lambda}(\overline{\varphi})\| &= \sup_{f\in H^1(\mathbb{S}^1)} \|(\varphi+h)(f)\| \leq \sup_{f\in L^1(\mathbb{S}^1)} \|(\varphi+h)(f)\| = \|\varphi+h\| \\ \Rightarrow \quad & \|\widetilde{\Lambda}(\overline{\varphi})\| \leq \inf_{h\in H_0^\infty} \|\varphi+h\| = \|\overline{\varphi}\|. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\widetilde{\Lambda}(\overline{\varphi})\| = \|\overline{\varphi}\|$, o que mostra a isometria desejada.

Assim temos que $(H^1(\mathbb{S}^1))^* = (L^1(\mathbb{S}^1))^*/H_0^\infty = L^\infty(\mathbb{S}^1)/H_0^\infty$. Temos assim que

$$(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0)^{**} = (H^1(\mathbb{S}^1))^* = L^\infty(\mathbb{S}^1)/H_0^\infty. \tag{5.2}$$

Defina agora

$$\begin{aligned} \psi : \quad L^\infty(\mathbb{S}^1) &\rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{B}} \\ \varphi &\mapsto H_\varphi. \end{aligned}$$

Note que $\text{Ker}(\psi) = H_0^\infty = \{\varphi \in H^\infty(\mathbb{S}^1) : \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad \forall n \leq 0\}$. Dessa forma, o teorema de Nehari nos garante que a aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}: \quad L^\infty(\mathbb{S}^1)/H_0^\infty \quad &\to \mathcal{H}_\mathcal{B} \\ \varphi + H_0^\infty \qquad &\mapsto H_\varphi, \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico entre espaços de Banach. (Pois $\widetilde{\psi}$ é um homomorfismo bijetor e a isometria vem do fato que, dado um operador de Hankel H_φ existe, pelo teorema de Nehari, uma função $\varphi_1 \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $H_\varphi = H_{\varphi_1}$ e $\|H_\varphi\| = \|\varphi_1\|$, assim: como $H_\varphi = H_{\varphi_1}$ temos que $H_{\varphi-\varphi_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi-\varphi_1 \in H_0^\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi+H_0^\infty = \varphi_1+H_0^\infty$, donde $\|\varphi+H_0^\infty\| = \|\varphi_1+H_0^\infty\| \leq \|\varphi_1\| = \|H_\varphi\|$. Por outro lado, dada $f \in H_0^\infty$, temos que $\|H_\varphi\| = \|H_{\varphi+f}\| \leq \|\varphi+f\|$, e como $\|H_\varphi\| = \|H_{\varphi_1}\| = \|\varphi_1\|$ temos que $\|H_\varphi\|$ independe de f, donde $\|H_\varphi\| \leq inf\{\|\varphi+f\| : f \in H_0^\infty\} = \|\varphi+H_0^\infty\|$ portanto, $\|H_\varphi\| = \|\varphi+H_0^\infty\|$.)

A recíproca do teorema de Hartmann , isto é, H_φ é compacto se φ é contínua, segue do fato que ao supormos φ contínua temos que existe uma seqüência de polinômios trigonométricos $\{\varphi_n\}$ que converge uniformemente para φ e neste caso

$$\|H_{\varphi_n} - H_\varphi\| = \|\varphi_n - \varphi\| \to 0,$$

donde $H_{\varphi_n} \to H_\varphi$ na topologia da norma. E assim, a compacidade de H_φ segue do fato que H_φ é o limite de uma seqüência de operadores de posto finito (a saber $\{H_n\}$), ou seja, $H_\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} H_{\varphi_n}$. (Este resultado encontra-se no apêndice)

Consideremos agora θ denotando a restrição de ψ para $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$. Como H_φ é compacto quando φ é contínua, temos que θ leva $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ em $\mathcal{H}_\mathcal{C}$. Vamos mostrar que $\text{Ker}(\theta) = \mathcal{A}_0$. De fato

$$\begin{aligned} \theta(\varphi) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad H_\varphi = 0 \Leftrightarrow \text{ a matriz de } H_\varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad \forall n \leq 0, \end{aligned}$$

e assim

Portanto,

$$\varphi \in \text{Ker}(\theta) \Leftrightarrow \widehat{\varphi}(n) = 0, \quad \forall n \leq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{A}_0$$

Assim, definindo

$$\begin{aligned} \widetilde{\theta}: \quad \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0 \quad &\to \mathcal{H}_{\mathcal{C}} \\ \varphi + \mathcal{A}_0 \quad &\mapsto H_\varphi, \end{aligned}$$

temos que $\widetilde{\theta}$ é injetora (pois $\mathrm{Ker}(\theta) = \mathcal{A}_0$).

Temos que

$$inc.can : \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/A_0 \to (\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/A_0)^{**} = L^\infty(\mathbb{S}^1)/H_0^\infty$$

$$\tilde{\theta} : \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/A_0 \to H_{\mathcal{C}}$$

$$\tilde{\psi}(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/A_0)^{**} \to (H_{\mathcal{C}})^{**}$$

$$inc.can : H_{\mathcal{C}} \to (H_{\mathcal{C}})^{**}$$

donde $inc.can \circ \tilde{\theta} = \tilde{\psi} \circ inc.can$ lema 5.1, $\mathcal{H}_{\mathcal{B}} \simeq (\mathcal{H}_{\mathcal{C}})^{**}$. Sabemos ainda que $\tilde{\psi}$ é uma isometria e assim vamos mostrar que $\tilde{\theta}$ também é uma isometria, pois uma vez provado isto, usaremos o lema 5.2 para concluir que $\tilde{\theta}$ é sobrejetora. De fato, sabemos pelo teorema de Hahn-Banach que a aplicacação natural de $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0$ em $(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0)^{**}$ é uma isometria e como $\tilde{\psi}$ e a aplicação natural de $H_{\mathcal{C}}$ em$(H_{\mathcal{C}})^{**}$ também o são temos que, para dada $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0$

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|inc.can.(f)\|_{(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0)^{**}} \\ &= \|\tilde{\psi}(inc.can.(f))\|_{(H_{\mathcal{C}})^{**}} \\ &= \|inc.can(\tilde{\theta}(f))\|_{H_{\mathcal{C}}} \\ &= \|\tilde{\theta}(f)\|, \end{aligned}$$

donde concluímos que $\tilde{\theta}$ é uma isometria. E portanto, pelo lema 5.2 temos que $\tilde{\theta}$ é sobrejetora.

Sendo assim, $\widetilde{\theta}$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)/\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Portanto um operador compacto $H \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{S}^1)$ é representado por uma matriz de Hankel se e somente se existe uma função contínua no círculo unitário complexo, tal que $H = H_\varphi$.

□

Observação 5.2 *Vimos no capítulo anterior, que a matriz de Hilbert é uma matriz de Hankel limitada, pois conseguimos encontrar uma função* $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ *tal que seus coeficientes de Fourier* *de índices positivos são as entradas da linha zero da matriz de Hilbert. É bem sabido que a função encontrada, a saber $\frac{1}{i}Arg(z)$ não é contínua em $\mathbb{S}^1$, o que nos leva a seguinte questão:*

"Será que podemos encontrar uma função em $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ tal que seus coeficientes de Fourier de índices positivos sejam as entradas da primeira linha da matriz de Hilbert?"

A resposta é não, pois a matriz de Hilbert não é compacta. Provemos esta afirmação.

Considere H denotando a matriz de Hilbert e H_n uma submatriz $n \times n$ de H dada por

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & & \cdots & & \frac{1}{2n-2} \end{bmatrix},$$

note que a matriz finita H_n pode ser vista como uma matriz infinita e para isto basta completar esta matriz com zeros infinitamente na direita e para baixo.

Observe ainda que a matriz $H - H_n$ contém uma submatriz $n \times n$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2n+1} & \frac{1}{2n+2} & \cdots & \frac{1}{3n} \\ \frac{1}{2n+2} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{3n} & & \cdots & \frac{1}{4n-1} \end{bmatrix}.$$

Se a matriz H fosse compacta teríamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|H - H_n\| = 0$.

Seja $\mathcal{Q}$ a matriz $n \times n$ onde toda entrada é $\frac{1}{n}$, isto é,

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n} & & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Note ainda que a matriz $\mathcal{Q}$ é uma matriz que representa uma projeção ortogonal, uma vez que

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}^2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{Q}\| = 1.$$

Tomando $v = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}) \in \mathcal{D}(\mathcal{Q})$ *temos* $\|v\| = 1$ *e* $\mathcal{Q}(v) = v$, *assim*

$$\frac{1}{4} = \frac{\langle \mathcal{Q}v, v\rangle}{4} = \sum_{i,j} \frac{\mathcal{Q}_{ij}}{4} \underbrace{v_i \overline{v_j}}_{\geq 0}. \qquad (**)$$

Como cada entrada de Y *é maior que as entradas de* $\frac{\mathcal{Q}}{4}$, *temos que*

$$\begin{aligned} (**) &\leq \sum_{i,j} Y_{ij} v_i \overline{v_j} = \langle Yv, v\rangle \\ &= |\langle Yv, v\rangle| \leq \|Yv\|\|v\| \leq \|Y\| \end{aligned}$$

e assim segue que

$$\|H - H_n\| \geq \|Y\| \geq \|\frac{\mathcal{Q}}{4}\| = \frac{1}{4},$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} \|H - H_n\| \neq 0,$$

e portanto H *não é compacta.*

Apêndice

Neste apêndice trataremos de algumas definições e resultados importantes, que por serem clássicos, omitiremos suas demonstrações.

A.1 Teoria da Medida

Medida Regular

Sejam $\beta \subset P(X)$ uma σ-álgebra de um espaço topológico X e $\mu : \beta \to [0, +\infty]$ uma medida (finitamente aditiva). A medida μ é dita regular se $\forall E \in \beta$ vale:

(1) $\mu(E) = \inf\{\mu(A) : A \in \beta \quad e \quad A \quad \text{é um aberto que contém} \quad E\}$

(2) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \in \beta \quad e \quad K \quad \text{é um compacto contido em} \quad E\}$.

Medidas Absolutamente Contínuas

Seja (X, β, μ) um espaço de medida e $\nu : \beta \to \mathbb{C}$ uma medida complexa ou medida com sinal, então ν é dita absolutamente contínua com respeito a ν (notação: $\nu \ll \mu$) se para todo $E \in \beta$ com $\mu(E) = 0$, temos $\nu(E) = 0$.

Medida σ-finita

Dado um espaço de medida (X, β, μ), a medida μ é dita σ-finita se existem $E_n \in \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tais que $\mu(E_n) < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$.

Lema de Urysohn

Lema A.3 *Suponha que A e B são subconjuntos fechados de um espaço de normal X e $A \cap B = \emptyset$; então existe uma função contínua $\xi : X \to [0,1]$ tal que*

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, se & x \in A \\ 1, se & x \in B \end{cases}$$

Demonstração: (Ver [18] pg: 207)

Densidade de $\mathcal{C}(X)$

Seja $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X)$ o conjunto das funções contínuas com suporte compacto.

Teorema A.2 *Seja X um espaço métrico localmente compacto e μ uma medida boreliana regular σ-finita (ou mais simplesmente, tal que todo conjunto unitário de X tenha medida finita). Então $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X)$ é denso em $L^p(X); 1 \leq p \leq +\infty$*

Demonstração: (Ver [1] pg:131)

Observação A.3 *Como $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(\mathbb{S}^1) = \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, segue que conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ é denso em $L^2(\mathbb{S}^1)$.*

A.2 Análise Funcional

Operador Linear

Um Operador Linear T é um operador tal que:

(1) o domínio $\mathcal{D}(T)$ e a imagem $\mathcal{R}(T)$ são espaços vetoriais sobre um mesmo corpo;

(2) $\forall x, y \in \mathcal{D}(T)$ e escalares α,

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx. \end{aligned}$$

Operador Limitado

Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. O operador T é dito limitado se $\exists c > 0, c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in X$, $\|Tx\| \leq c\|x\|$.

Teorema de Continuidade e Limitação

Teorema A.3 *Seja* $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ *um operador linear, onde* $\mathcal{D} \subset X$ *e* X *e* Y *são espaços normados. Então:*

T é contínuo $\Leftrightarrow$ T é limitado.

Demonstração: (veja [2] pg: 97)

Teorema da Representação de Riesz

Teorema A.4 *Seja* X *um espaço compacto Hausdorff, e* β *denotando a* σ*- álgebra Borel.*

(1) Seja $\mu : \beta \to [0, +\infty)$ *uma medida finita, então a equação:*

$$\varphi_\mu(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in \mathcal{C}(X)$$

define um funcional linear limitado $\varphi_\mu \in \mathcal{C}(X)^*$*, o qual é positivo, isto é,* $f \geq 0 \Rightarrow \varphi_\mu(f) \geq 0$.

(2) Reciprocamente, se $\varphi \in \mathcal{C}(X)^*$ *é um funcional linear limitado o qual é positivo, então existe uma única medida finita* $\mu : \beta \to [0, +\infty)$ *tal que* $\varphi = \varphi_\mu$.

Demonstração: (Ver [18] pg:235)

Teorema de Isomorfismo

Teorema A.5 *Seja* X *um espaço compacto e Hausdorff. Então a equação:*

$$\varphi_\mu(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in \mathcal{C},$$

define um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach $\mathcal{M}(X)$ *(o espaço de todas as medidas complexas finitas) e* $\mathcal{C}(X)^*$ *dado por* $\mu \mapsto \varphi_\mu$.

Demonstração: (ver [18] pg: 236)

Teorema de F e M.Riesz

Teorema A.6 *Toda medida Borel complexa no círculo unitário, cujos coeficientes de Fourier com índices negativos são nulos, é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue.*

Demonstração: (Ver [20] pg: 369)

Teorema de Stone-Weierstrass

Teorema A.7 *(1) (Versão Real) Seja X um espaço compacto e Hausdorff; seja $\mathcal{A}$ uma sub-álgebra da álgebra de Banach real $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ (i.e, o conjunto da funções contínuas de X em $\mathbb{R}$); suponha que $\mathcal{A}$ satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\mathcal{A}$ contém as funções constantes; e

(ii) $\mathcal{A}$ separa pontos em X.

Então, $\mathcal{A}$ é densa em $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$.

(2) (Versão Complexa) Seja X como acima, e suponha que $\mathcal{A}$ é uma sub-álgebra auto-adjunta de $\mathcal{C}(X)$ (i.e, $A = A^*$, e $A^* = \{a^* : a \in A\}$, [5]) satisfazendo as condições (i) e (ii) acima. Então, $\mathcal{A}$ é densa em $\mathcal{C}(X)$.

Demonstração: (Ver [18] pg:234)

A.3 Operadores Compactos

Operador Linear compacto

Sejam X e Y normados. Um operador $T : X \to Y$ é dito compacto (ou completamente contínuo) se T é linear e se para qualquer subconjunto limitado M de X, a imagem $T(M)$ é relativamente compacta, isto é, $\overline{T(M)}$ é compacto.

Critério de Compacidade

Teorema A.8 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Então T é compacto se e somente se leva seqüências limitadas $\{x_n\}$ em X em seqüências $\{T(x_n)\}$ em Y que possuem uma subseqüência convergente.*

Demonstração: (Ver [2] pg:407)

Domínio ou Imagem de Dimensão Finita

Teorema A.9 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Então:*

(1) Se T é limitado e dim$(T(X)) < \infty$, então o operador T é compacto.

(2) Se dim$X < \infty$, então o operador T é compacto.

Demonstração: (Ver [2] pg:407)

Seqüência de Operadores Lineares Compactos

Teorema A.10 *Seja $\{T_n\}$ uma seqüência de operadores lineares compactos de um espaço normado X sobre um espaço de Banach Y. Se $\{T_n\}$ é uniformemente convergente, ($\|T_n - T\| \to 0$) então o operador limite T é compacto.*

Demonstração: (Ver [2] pg:408)

Convergência Fraca

Teorema A.11 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Suponha que $\{x_n\}$ em X é tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, ou seja converge fracamente. Então $\{T(x_n)\}$ converge fortemente em Y e seu limite é Tx.*

Demonstração: (Ver [2] pg:410)

Operadores Compactos como Limite de Operadores de Posto Finito

Teorema A.12 *Seja Y um espaço de Banach e $T_n : X \to Y, n \geq 1$, operadores de posto finito. Se $\{T_n\}$ é uniformemente convergente então o operador limite T é compacto.*

Demonstração: Temos por hipótese que os $\{T_n\}'s$ são limitados, ou seja, a imagem de cada T_n tem dimensão finita. Temos ainda que $\{T_n\}$ converge na topologia da norma, donde segue que cada T_n é limitado, uma vez que toda seqüência convergente é limitada.

Assim, pelo teorema (A.9) temos que cada T_n é compacto, e assim estamos nas hipóteses do teorema (A.10) e portanto o operador limite é compacto.

$\square$

A.4 Resultados Extras

Teorema 1 de ([16])

Sejam T_1 e T_2 operadores limitados em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então o espaço dos operadores limitados X em $\mathcal{H}$ tais que $XT_1 = T_2X$, onde X é solução desta equação, (denotaremos por $\mathcal{T}(T_1, T_2)$) é isometricamente isomorfo ao segundo dual de sua parte compacta, que provêm de que cada operador em $\mathcal{T}(T_1, T_2)$ é o limite, na topologia fraca de operadores, de uma seqüência de operadores compactos em $\mathcal{T}(T_1, T_2)$.

(A demonstração deste resultado encontra-se em ([16]), pg:437)

Teorema 2 de ([16])

Seja S o shift unilateral S^+ a inversa à esquerda de S, que leva e_0 no zero. Então $\mathcal{T}(S, S^+)$ é isomorfo a $C(S, S^+)^{**}$, que denota a parte compacta de $\mathcal{T}(S, S^+)$.

(A demonstração deste resultado encontra-se em ([16]), pg:437)

Referências Bibliográficas

[1] A. A. de CASTRO Jr - Curso de Teoria da Medida, IMPA, Rio de Janeiro, (2004).

[2] E. KREYSZIG - Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York,(1978)

[3] E. W. WEISSTEIN - Almost Everywhere Convergence, Mathworld–A Wolfran Web Resource,http://mathworld.wolfran.com/AlmostEverywhereConvergence.html.

[4] F.J. BERTOLOTO - C^*- Algebras de Banach de Funções Analíticas, UNICAMP, Campinas,(2005)

[5] G.J. MURPHI - C^*- Algebras and Operator Theory, Academic Press, San Diego,(1990)

[6] HEWITT, ROSS - Abstract Harmonic Analysis, John Wiley and Sons, New York,(1978)

[7] K. R. DAVIDSON- C^*- Algebras by Examples, Amer. Math. Soc., USA, (1996).

[8] L.B. PAGE - Bounded and Compact Vectorial Hankel Operators , *Trans. Amer. Math. Soc.***150**, p.529-540, (1970).

[9] L.B. PAGE - Compact Hankel Operators and the F. and M. Riesz Theorem , *Pac. Jour. of Math.* **56**, p. 221-223, (1973).

[10] L. DEBNATH, P. MIKUSINSKI - Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Academic Press, San Diego; New York; Boston; London; Tokyo; Toronto, (1990).

[11] M. CHOI - Tricks and Treats with the Hilbert Matrix, *The Amer. Math. Monthly* **90**, **5**, p. 301 - 312, (1983).

[12] P.A. FILLMORE - A User's Guide to Operators Algebras , John Wiley and Sons, New York,(1996)

[13] P. KOOSIS - H^p spaces, John Wiley and Sons, New York,(1996)

[14] P. HARTMAN - On Complitely Continuous Hankel Matrices , *Proc. Amer. Math. Soc* **9**, p. 862-866, (1958).

[15] P.R. HALMOS - A Hilbert Space Problem Book , Springer-Verlag, New York; Heidelberg; Berlin, (1980).

[16] R. GELLAR and L. PAGE - A New Look at Some Familiar Spaces of Intertwining Operators , *Pacific. J. Math.* **30**, p. 311-328, (1977).

[17] S. PARROT - On a Quotient Norm and the Sz.-Nagy-Foias Lifting Theorem , *Jour. of Func. Anal.* **47**, p. 435-441, (1973).

[18] V.S. SUNDER - Functional Analysis:Spectral Theory , Birkhäuser Advanced Texts, Basel; Boston; Berlin, (1998).

[19] Z. NEHARI - On Bounded Bilinear Forms , *Ann. of Math. Soc.* **65**, p. 153-162, (1957).

[20] W. RUDIN - Real and Complex Analysis , Mcgraw Hill, New York, (1974).